

ポアンカレ予想

小沢 誠

平成 28 年 2 月 2 日

目 次

第 1 章 多様体	3
第 2 章 ホモロジー群	5
第 3 章 基本群	8
第 4 章 被覆空間	11
第 5 章 ヒーガード分解	19
第 6 章 デーン手術	22
第 7 章 ザイフェルト多様体	25
第 8 章 ハーケン多様体	27
第 9 章 球面・トーラス分解	29
第 10 章 幾何化予想	30

講義概要

ポアンカレ予想について解説します。

シラバス

100 年もの間未解決であったポアンカレ予想がペレルマンによって解決されました。実際ペレルマンは、ポアンカレ予想を大きく含む、サーストンによる幾何化予想をも解決しています。幾何化予想の解決により、宇宙の在り得る全ての形が分かったことになります。

ポアンカレ予想

1900 年、ポアンカレは閉 3 次元多様体 M について、次の予想を発表した。

予想 0.0.1 ([5]). $H_1(M) \cong H_1(S^3) \Rightarrow M \cong S^3$?

ところが、ポアンカレは反例を見つけ、次の予想に修正した。

予想 0.0.2 ([6]). $\pi_1(M) \cong \pi_1(S^3) \Rightarrow M \cong S^3$?

予想 0.0.2 が、ポアンカレ予想と呼ばれ、その後 100 年もの間、数学者を悩ませることになる。

幾何化予想

2 次元の幾何化予想はケーベとポアンカレにより解決されている。

定理 0.0.3 (一意化定理 (ヒルベルトの第 22 問題)). 閉 2 次元多様体は、 S^2 , $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{H}^2$ のいずれかの幾何構造を持つ。

これの 3 次元版がサーストンの幾何化予想である。

予想 0.0.4 (サーストンの幾何化予想). 閉 3 次元多様体を球面分解し、トーラス分解すると、各成分は $\mathbb{E}^3$, S^3 , $\mathbb{H}^3$, $S^2 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, $\tilde{SL}_2$, Nil , Sol のいずれかの幾何構造を持つ。

第1章 多様体

定義 1.0.1. 局所的に n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ と同相なハウスドルフ空間を n 次元多様体という。 n 次元多様体がコンパクトのとき閉であるといい、コンパクトでないとき開であるという。

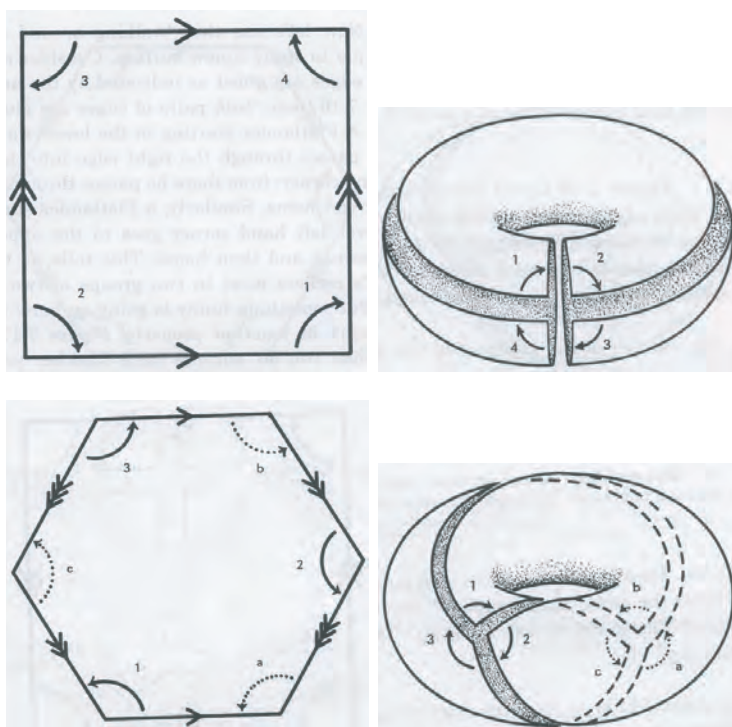
例 1.0.2. n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$ は開 n 次元多様体である。

例 1.0.3. n 次元球面 $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} | x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ は閉 n 次元多様体である。

例 1.0.4. n 次元球体 $B^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$ の内部は開 n 次元多様体である。

例 1.0.5. $\mathbb{Z}^n$ の $\mathbb{R}^n$ への作用 $(m_1, \dots, m_n) \cdot (x_1, \dots, x_n) = (x_1 + m_1, \dots, x_n + m_n)$ による商空間 $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ を n 次元トーラスといい、 T^n で表す。 T^n は閉 n 次元多様体である。

例 1.0.6. 2次元トーラス T^2 は4角形または6角形の対辺を貼り合わせて得られる。

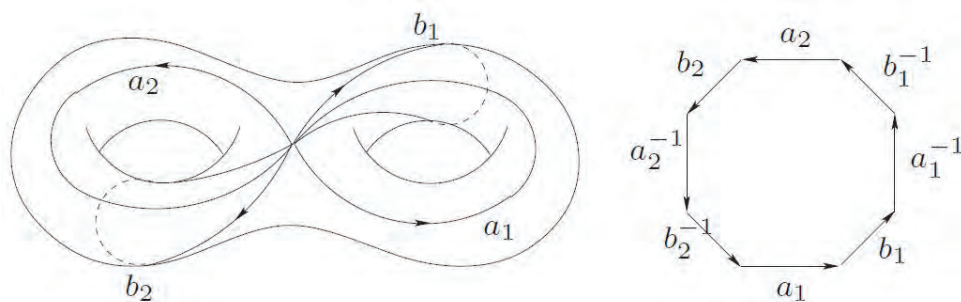


例 1.0.7. $\mathbb{Z}_2 = \pm 1$ の S^n への作用を $\pm 1 \cdot (x_1, \dots, x_{n+1}) = (\pm x_1, \dots, \pm x_{n+1})$ による商空間 $S^n / \mathbb{Z}_2$ を n 次元射影空間といい、 P^n で表す。 P^n は閉 n 次元多様体である。

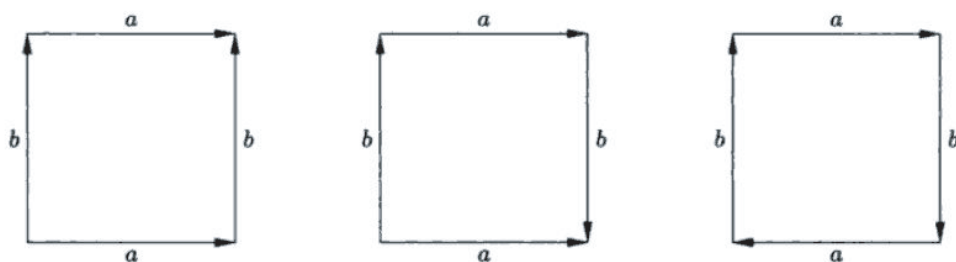
定義 1.0.8. M_i ($i = 1, 2$) を n 次元多様体とし、 B_i を M_i 内の n 次元球体とする。 $M_1 - \text{int} B_1$ と $M_2 - \text{int} B_2$ を貼り合わせて得られる n 次元多様体 M を M_1 と M_2 の連結和といい、 $M = M_1 \# M_2$ と表す。

定理 1.0.9. 閉 2次元多様体は、 $S^2 \# T_1^2 \# \dots \# T_g^2$ ($g = 0, 1, \dots, g$) 又は $P_1^2 \# \dots \# P_h^2$ ($h = 1, \dots, g$) に同相である。

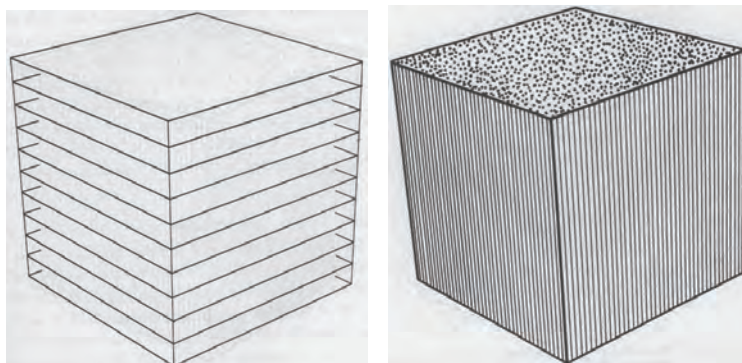
例 1.0.10. 8角形を貼り合わせると、種数 2 の閉 2 次元多様体を得られる。



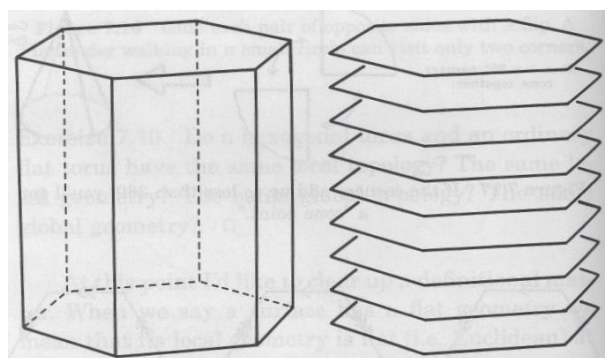
練習問題 1.0.11. 4 角形を次のように貼り合わせると、どんな 2 次元多様体ができるか？



例 1.0.12. T^3 は $T^2 \times S^1$ の構造を持つ。



6 角形トーラス T^2 と S^1 の直積構造も持つ。



問題 1.0.13. 全ての n 次元多様体を構成する方法を調べよ。

第2章 ホモロジー群

ホモロジー群は 1895 年、ポアンカレによって導入された。

n 次元ユークリッド空間内の一般の位置にある $n+1$ 個の点 $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ について、それらの凸包を $a_0, a_1, \dots, a_n$ を頂点とする n 次元単体といい、 $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ で表す。単体 $\sigma = [a_0, a_1, \dots, a_n]$ について、 $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ の部分集合を頂点とする単体 τ を σ の面といい、 $\tau \prec \sigma$ と表す。

n 次元ユークリッド空間内の単体の集合 K が次の 3 条件を満たすとき、 K を単体的複体という。

1. $\sigma \in K$ かつ $\tau \prec \sigma$ ならば、 $\tau \in K$
2. $\sigma_1, \sigma_2 \in K$ ならば、 $\sigma_1 \cap \sigma_2 \prec \sigma_1$ かつ $\sigma_1 \cap \sigma_2 \prec \sigma_2$
3. $\tau \in K$ ならば、 $\#\{\sigma \mid \tau \prec \sigma\} < \infty$

$|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ を K の定める多面体という。

単体的複体 K の q 次元単体全体と一対一に対応する基底をもつ自由加群を $C_q(K)$ と書き、 K の q 次元鎖群という。 $n+1$ 個の文字の置換 π に対して、 $[a_{\pi(0)}, a_{\pi(1)}, \dots, a_{\pi(n)}] = \text{sign}(\pi)[a_0, a_1, \dots, a_n]$ と定める。

境界作用素 $\partial_q : C_q(K) \rightarrow C_{q-1}(K)$ を $\sigma = [a_0, a_1, \dots, a_q]$ に対して

$$\partial_q \sigma = \sum_{i=0}^q (-1)^i [a_0, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_q]$$

と定まる自由加群の準同型として定義する。

補題 2.0.1. $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$

定義 2.0.2. $Z_q(K) = \text{Ker}(\partial_q)$ 、 $B_q(K) = \text{Im}(\partial_{q+1})$ とおくと、

$$H_q(K) = Z_q(K) / B_q(K)$$

を K の q 次元ホモロジー群という。

アーベル群の基本定理より、ホモロジー群は

$$H_q(K) \cong \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{t_1} \oplus \mathbb{Z}_{t_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{t_m}$$

という標準形を持つ。ここで、 $\mathbb{Z}_t$ は位数 t の巡回群で、 t_j は t_{j+1} の約数である。 $H_q(K)$ の階数、即ち $\mathbb{Z}$ の個数を K の q 次元ベッチ数といい、 $b_q(K)$ で表す。また、 $\mathbb{Z}_{t_1} \oplus \mathbb{Z}_{t_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{t_m}$ を捻れ部分という。交代和

$$\chi(K) = \sum_{q=0}^n (-1)^q b_q(K)$$

を K のオイラー数という。

命題 2.0.3. q 単体の個数を $\alpha_q(K)$ とするとき、

$$\chi(K) = \sum_{q=0}^n (-1)^q \alpha_q(K)$$

が成り立つ。

K を単体的複体、 K_1, K_2 を K の部分複体で、 $K = K_1 \cup K_2$ を満たすとする。 $i_1 : K_1 \cap K_2 \rightarrow K_1, i_2 : K_1 \cap K_2 \rightarrow K_2, j_1 : K_1 \rightarrow K, j_2 : K_2 \rightarrow K$ をそれぞれ包含写像とすると、鎖複体の短完全列

$$0 \rightarrow C(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{\alpha} C(K_1) \oplus C(K_2) \xrightarrow{\beta} C(K) \rightarrow 0$$

が存在する。ここで、

$$\alpha(x) = (i_1)_*(x) \oplus (i_2)_*(x), \beta(x \oplus y) = (j_1)_*(x) - (j_2)_*(y)$$

である。これより、次のマイヤービートリス完全列が導かれる。

定理 2.0.4. 以下の完全列が存在する。

$$\cdots \rightarrow H_q(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{\alpha_*} H_q(K_1) \oplus H_q(K_2) \xrightarrow{\beta_*} H_q(K) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(K_1 \cap K_2) \rightarrow \cdots$$

例 2.0.5. K を S^3 内の結び目とし、 $N(K)$ を K の正則近傍、 $E(K) = S^3 - \text{int}N(K)$ を K の外部とする。以下のホモロジー群は既知として使用する。

$$H_n(S^3) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (n = 0, 3) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$H_n(N(K) \cap E(K)) = H_n(T^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (n = 0, 2) \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & (n = 1) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$H_n(N(K)) = H_n(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & (n = 0, 1) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

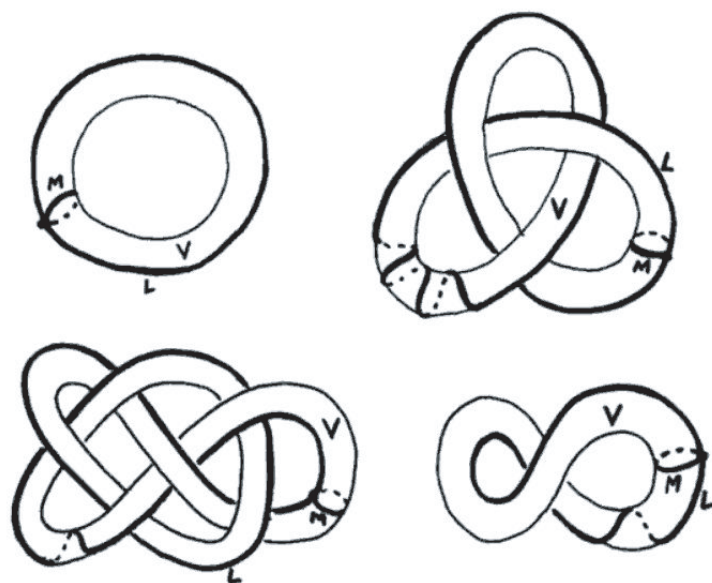
$S^3 = N(K) \cup E(K)$, $T = N(K) \cap E(K)$ に対し、マイヤービートリス完全列を適用する。

$$\begin{aligned} H_3(T) &\rightarrow H_3(N(K)) \oplus H_3(E(K)) \rightarrow H_3(S^3) \\ &\rightarrow H_2(T) \rightarrow H_2(N(K)) \oplus H_2(E(K)) \rightarrow H_2(S^3) \\ &\rightarrow H_1(T) \rightarrow H_1(N(K)) \oplus H_1(E(K)) \rightarrow H_1(S^3) \end{aligned}$$

1. $E(K)$ は連結であるから、 $H_0(E(K)) = \mathbb{Z}$ である。
2. $H_2(S^3) = H_1(S^3) = 0$ より、 $H_1(T) \rightarrow H_1(N(K)) \oplus H_1(E(K))$ は全単射なので、 $H_1(E(K)) = \mathbb{Z}$ である。
3. $\partial E(K) = T$ より、包含写像 $T \rightarrow E(K)$ から誘導されるホモロジー準同型写像 $H_2(T) \rightarrow H_2(E(K))$ は 0 写像である。また、 $H_2(S^3) = 0$ より、 $H_2(T) \rightarrow H_2(N(K)) \oplus H_2(E(K))$ は全射であるから、 $H_2(E(K)) = 0$ である。

4. 3より、 $H_3(S^3) \rightarrow H_2(T)$ は全射、よって単射である。従って、 $H_3(N(K)) \oplus H_3(E(K)) \rightarrow H_3(S^3)$ は 0 写像である。また、 $H_3(T) = 0$ より、 $H_3(N(K)) \oplus H_3(E(K)) \rightarrow H_3(S^3)$ は単射なので、 $H_3(E(K)) = 0$ でなければならない。

ここで重要なことは、同型写像 $H_1(T) \rightarrow H_1(N(K)) \oplus H_1(E(K))$ において、 T 上に 2 本の単純閉曲線 m, l が一意に存在して、 $H_1(T) = \langle [m] \rangle \oplus \langle [l] \rangle$ であり、 $[m] = 0 \in H_1(N(K))$ かつ $H_1(E(K)) = \langle [m] \rangle$ 、 $[l] = 0 \in H_1(E(K))$ かつ $H_1(N(K)) = \langle [l] \rangle$ となることである。 m をメリディアンといい、 l をロンジチュードという。



ロンジチュードは $[l] = 0 \in H_1(E(K))$ であるから、 $\partial F = l$ となる $[F] \in C_2(E(K))$ が存在する。特に、 F を連結かつコンパクトな向き付け可能曲面とすると、 F を K のザイフェルト曲面という。



左側の曲面は向き付け不可能なのでザイフェルト曲面ではない。
右側の曲面は向き付け可能なのでザイフェルト曲面である。

練習問題 2.0.6. S^3 内の絡み目 $L = K_1 \cup \cdots \cup K_\mu$ の外部のホモロジー群を求めよ。

第3章 基本群

基本群は1904年、ポアンカレによって導入された。

位相空間 X から Y への連続写像 $f, g : X \rightarrow Y$ に対して、連続写像 $F : X \times I \rightarrow Y$ が存在し、 $F|_{X \times \{0\}} = f$ かつ $F|_{X \times \{1\}} = g$ を満たすとき、 f と g はホモトピックであるという。

以下、 X は弧状連結な位相空間として、基点 $x_0 \in X$ を固定する。連続写像 $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ で $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ を満たすものを、 x_0 を基点とする X のループとよぶ。このようなループ全体に基点を固定するホモトピーによる同値関係を入れ、同値類の集合を $\pi_1(X, x_0)$ で表す。 x_0 を基点とする X のループ α, β に対して合成 $\alpha \cdot \beta$ を

$$\alpha \cdot \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & (0 \leq t \leq 1/2) \\ \beta(2t - 1) & (1/2 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

で定義すると、 $\pi_1(X, x_0)$ に群構造を定めることがわかる。このようにして定義された群 $\pi_1(X, x_0)$ を X の基本群とよぶ。

定理 3.0.1. 基本群 $\pi_1(X, x_0)$ のアーベル化は、1次元ホモロジー群 $H_1(X)$ に等しい。

定理 3.0.2 (ザイフェルト - ファンカンペンの定理). $X = A \cup B$ とし、 $A, B, A \cap B$ が X の連結な部分空間であるとする。基点 $x_0 \in A \cap B$ をとり、

$$\begin{aligned} \pi_1(A, x_0) &= \langle x_1, \dots, x_k | r_1, \dots, r_l \rangle \\ \pi_1(B, x_0) &= \langle y_1, \dots, y_m | s_1, \dots, s_n \rangle \\ \pi_1(A \cap B, x_0) &= \langle z_1, \dots, z_p | t_1, \dots, t_q \rangle \end{aligned}$$

とするとき、

$$\pi_1(X, x_0) = \langle x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_m | r_1, \dots, r_l, s_1, \dots, s_n, i_*(z_1) = j_*(z_1), \dots, i_*(z_p) = j_*(z_p) \rangle$$

である。ここで、 i, j は包含写像 $i : A \cap B \rightarrow A, j : A \cap B \rightarrow B$ とする。

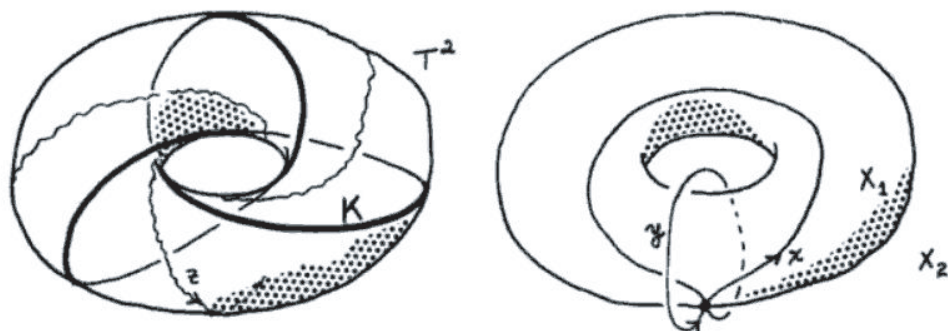
例 3.0.3. K を S^3 内の三葉結び目とする。 K は標準的に埋め込まれたトーラス T^2 の上に描くことができる。 T^2 は S^3 を二つのソリッドトーラス X_1, X_2 に分解する。このとき、

$$\begin{aligned} \pi_1(X_1 - K, x_0) &= \langle x | - \rangle \\ \pi_1(X_2 - K, x_0) &= \langle y | - \rangle \\ \pi_1((X_1 - K) \cap (X_2 - K), x_0) &= \langle z | - \rangle \end{aligned}$$

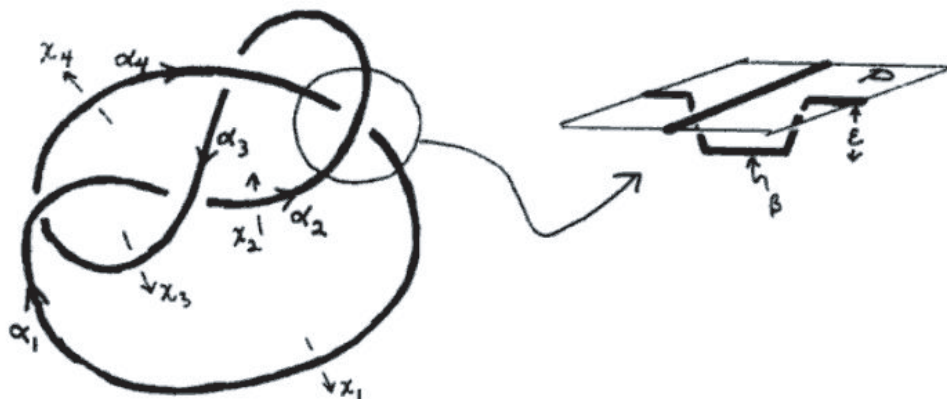
であり、 $i : (X_1 - K) \cap (X_2 - K) \rightarrow X_1 - K, j : (X_1 - K) \cap (X_2 - K) \rightarrow X_2$ とするとき、 $i_*(z) = x^2, j_*(z) = y^3$ であるから、

$$\pi_1(S^3 - K, x_0) = \pi_1((X_1 - K) \cup (X_2 - K), x_0) = \langle x, y | x^2 = y^3 \rangle$$

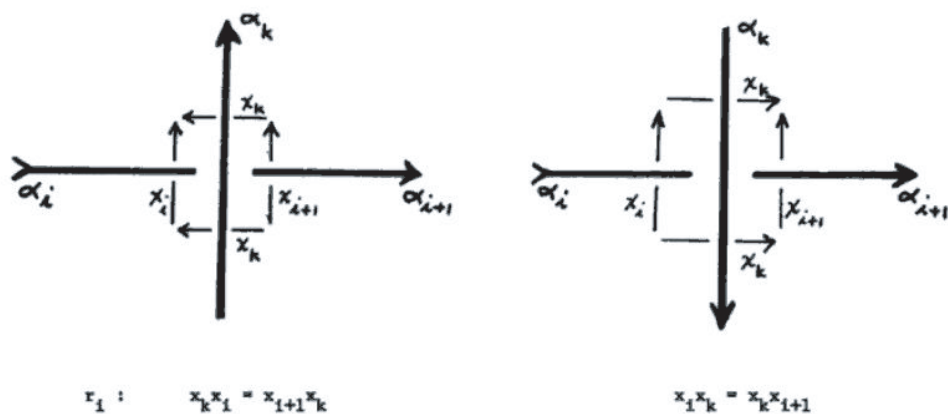
である。



例 3.0.4 (ビルディング表示). K を $\mathbb{R}^3$ 内の結び目とする。 K から全ての下交差を除いた部分 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ を、 $x-y$ 平面 P 上に描く。



基点 $(0,0,1) = *$ から P へ降り、 α_i の右から入って左から出て、再び $*$ に戻ってくるループを x_i とおく。このとき、以下の関係式 r_i を得る。



定理 3.0.5. K の結び目群は以下の表示を持つ。

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 - K) = \langle x_1, \dots, x_n | r_1, \dots, r_n \rangle$$

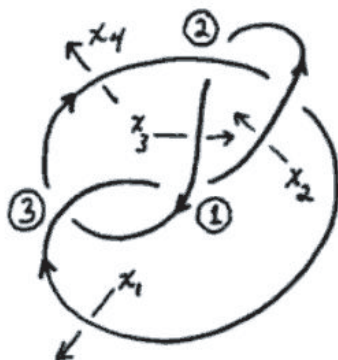
ここで、 r_i の任意の一つを省略できる。

例 3.0.6. 8 の字結び目 K に対して、以下の関係式を得る。

$$1. x_1x_3 = x_3x_2$$

$$2. x_4x_2 = x_3x_4$$

$$3. x_3x_1 = x_1x_4$$



1 と 3 を $x_2 = x_3^{-1}x_1x_3$, $x_4 = x_1^{-1}x_3x_1$ と変形し、2 に代入すると、

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 - K) = \langle x_1, x_3 | x_1^{-1}x_3x_1x_3^{-1}x_1x_3 = x_3x_1^{-1}x_3x_1 \rangle$$

が得られる。

練習問題 3.0.7. 三葉結び目 K の結び目群のビルティンガー表示を求め、例 3.0.3 で求めた表示と同値であることを示せ。

$$\pi_1(S^3 - K) = \langle x, y | x^2 = y^3 \rangle$$

結び目に対しての“ポアンカレ予想”は解かれている。

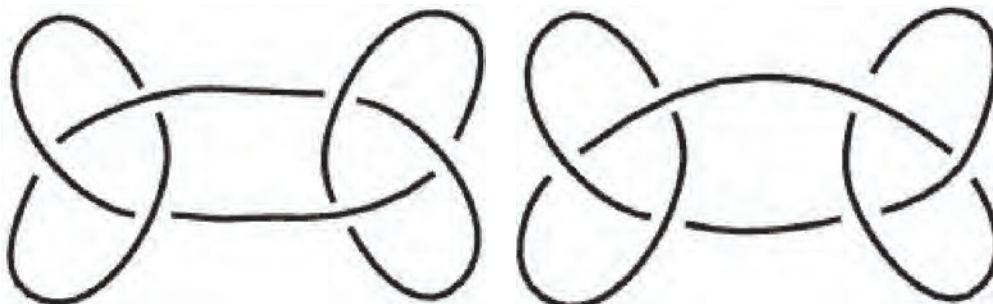
定理 3.0.8. K を S^3 内の結び目、 O を自明な結び目とすると、 $\pi_1(S^3 - K) \cong \pi_1(S^3 - O) = \mathbb{Z} \Rightarrow K \cong O$

更に、素な結び目に対しては、結び目群は完全不変量である。

定理 3.0.9. K_1 と K_2 を S^3 内の素な結び目とする。このとき、 $\pi_1(S^3 - K_1) \cong \pi_1(S^3 - K_2) \Rightarrow K_1 \cong K_2$

注 3.0.10. この定理は、合成結び目については成り立たない。実際、 $\pi_1(S^3 - K_1 \# K_2) \cong \pi_1(S^3 - K_1 \# K_2!)$ であるが、結び目の素分解定理により、 K_2 がもろ手型でなければ $K_1 \# K_2 \neq K_1 \# K_2!$ である。

練習問題 3.0.11. グラニー結び目とスクエア結び目の結び目群が同型であることを示せ。



グラニー結び目

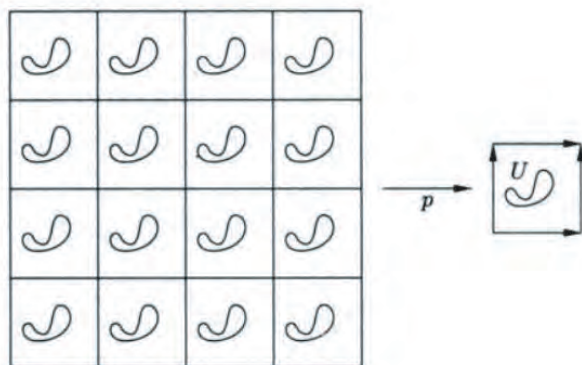
スクエア結び目

第4章 被覆空間

位相空間 Y から X への連続写像 $\pi: Y \rightarrow X$ が被覆写像であるとは、 X の各点の開近傍 U で次の条件を満たすものが存在することである。

1. $\pi^{-1}(U)$ は Y の共通部分をもたない開集合の和集合 $\bigcup_{\lambda} V_{\lambda}$ と表される。
2. π の V_{λ} への制限 $\pi|_{V_{\lambda}}: V_{\lambda} \rightarrow U$ は同相写像である。

このとき、 Y を X の被覆空間とよぶ。



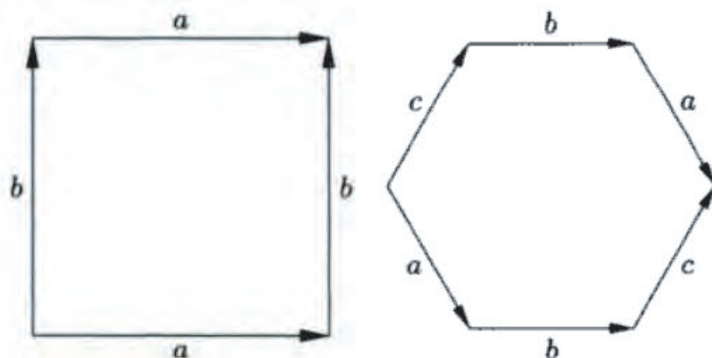
群 G が、位相空間 Y に同相写像として自由に作用しているとする。さらに、 Y の各点について開近傍 V で、 $g \in G$ が単位元でなければ $g \cdot V \cap V = \emptyset$ となるものが存在すると仮定する。このとき、商空間 Y/G を X とおくと自然な射影 $\pi: Y \rightarrow X$ は被覆写像である。このようにして得られる被覆空間を G -被覆とよぶ。

一般に基本群が単位元のみからなる位相空間は単連結であるという。また、 G -被覆 $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ で、 $\tilde{X}$ が単連結であるとき、 $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ を普遍被覆という。

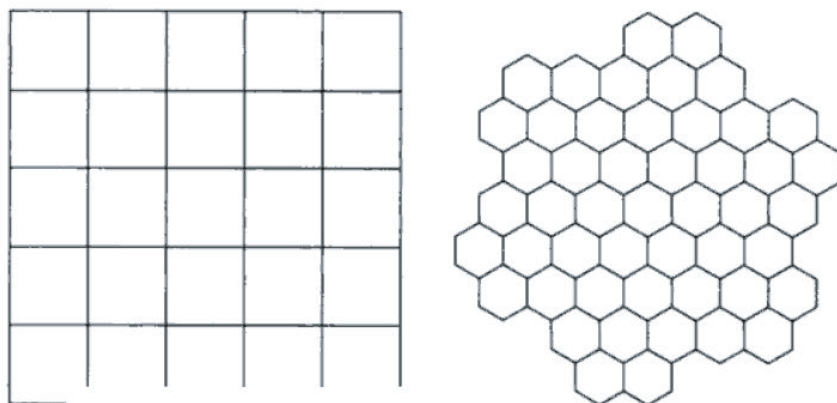
定理 4.0.1. G -被覆 $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ が普遍被覆ならば、 $\pi_1(X, x_0)$ は群 G と同型である。

例 4.0.2. $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow T^n$ は普遍被覆であり、 $\pi_1(T^n, x_0) = \mathbb{Z}^n$ である。

トーラス T^2 は、4角形の対辺を貼り合わせても、6角形の対辺を貼り合わせても得られる。



それぞれ、ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ のタイル張りと与えている。

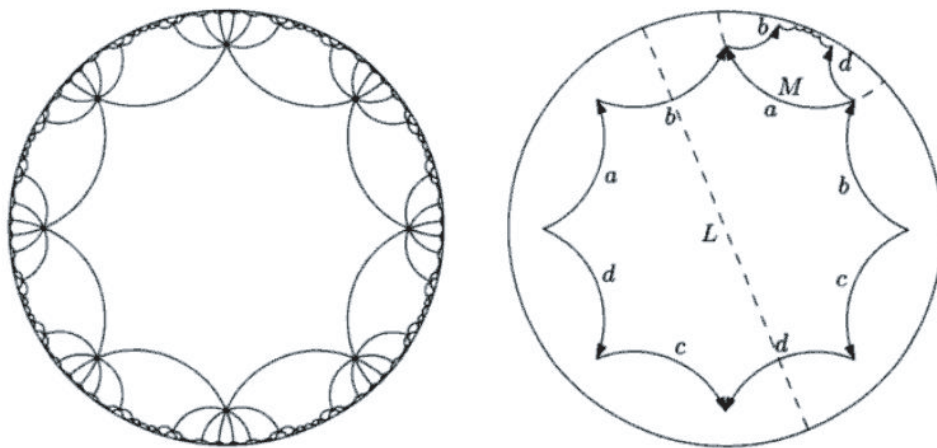


ここで大切なことは各頂点の周りでの角の合計がちょうど 360° となっていることである。

例 4.0.3. $\pi : S^n \rightarrow P^n$ は普遍被覆であり、 $\pi_1(P^n, x_0) = \mathbb{Z}_2$ である。

例 4.0.4. $\pi : \mathbb{H}^2 \rightarrow T^2 \# T^2$ は普遍被覆であり、 $\pi_1(T^2 \# T^2, x_0) = \langle a, b, c, d \mid aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1} = 1 \rangle$ である。

正 8 角形の内角は 135° であるから、正 8 角形でユークリッド平面をタイル張りすることはできない。そこで、一つの内角がちょうど 45° となるような正 8 角形を双曲平面内で考える。双曲平面では大きい 8 角形ほど内角が小さくなるので、そのような正 8 角形は存在する。



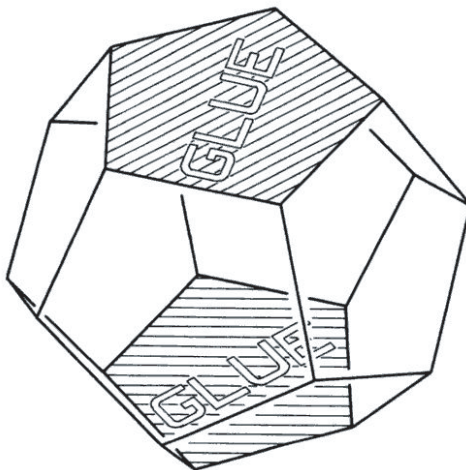
正 8 角形による双曲平面のタイル貼り

例 4.0.5. 12 面体の対面を時計回りに $1/10$ 回転して貼り合わせてできる空間がポアンカレ 12 面体空間 PDS である。

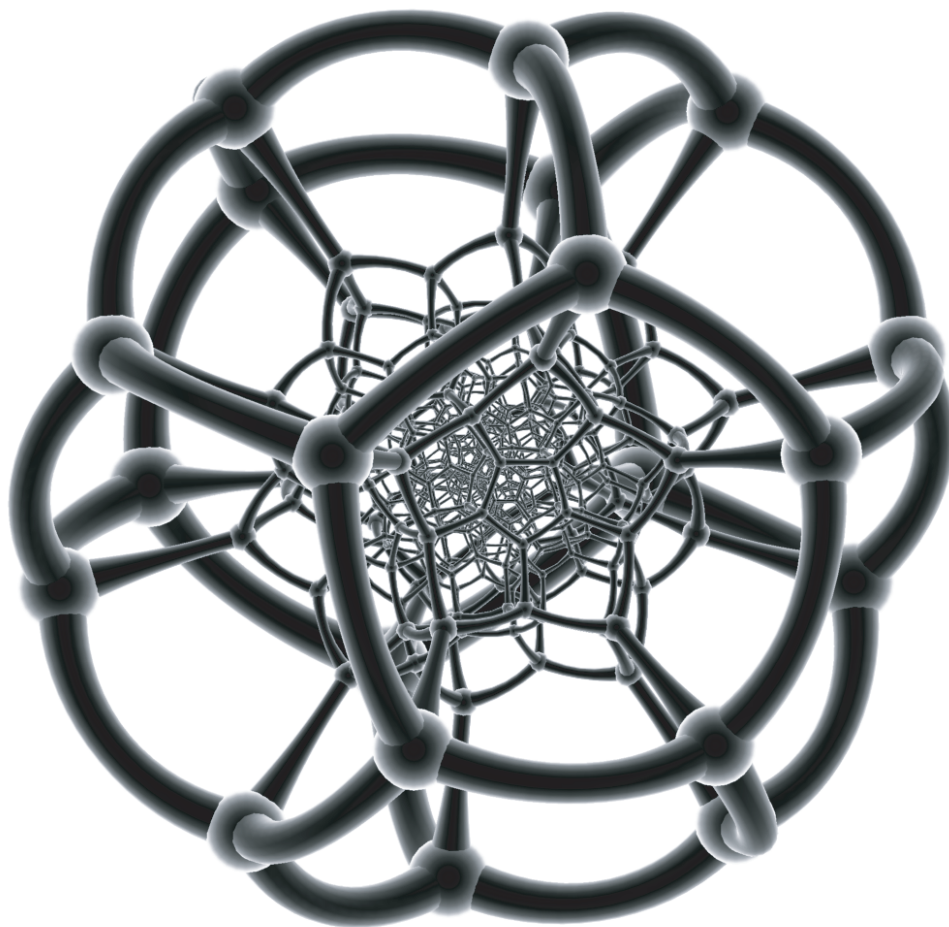
12 面体の辺数は $12 \times 5/2 = 30$ 本であり、それらは 3 本ずつ集まり PDS 内では 10 本の辺となる。12 面体の頂点数は $12 \times 5/3 = 20$ 個であり、それらは 4 個ずつ集まり PDS 内では 5 個の頂点となる。よって、 PDS 内の各頂点の周りでは、4 面体のパターンとなる。

PDS 内で、各辺のまわりには 3 枚の面が集まっている。従って、面角は 120° でなければならない。ところが、ユークリッド空間内では、12 面体の面角は $\tan^{-1}(-2)$ 、即ち 116.565° であるから、 $\mathbb{R}^3$ は PDS の普遍被覆空間には成り得ない。

そこで、 S^3 内で 12 面体を考えると、面角がちょうど 120° となる 12 面体が存在することが分かる。よって、 $\pi: S^3 \rightarrow PDS$ は普遍被覆であり、 $\pi_1(PDS, x_0) = \langle x, z | (zx)^2 = z^3 = x^5 \rangle$ である。これを可換化すると、 $H_1(PDS) = 0$ となり、 $H_1(PDS) \cong H_1(S^3)$ である。ところが、 $PDS \not\cong S^3$ であるので、予想 0.0.1 の反例となっている。



S^3 を 12 面体でタイル張りするには、120 個の 12 面体が必要となる。



観測結果によると、ポアンカレ 12 面体空間が宇宙の形に近いらしい。([9])

宇宙のための幾何			
宇宙の幾何	宇宙の運命	宇宙の密度	宇宙の容積
楕円	いずれ 崩壊	密集 $\rho > \frac{3}{8\pi G} H^2$	有限 (閉)
ユークリッド	永久に膨張 (ほんの少し)	境界線 $\rho = \frac{3}{8\pi G} H^2$	有限あるいは無限 (閉あるいは開)
双曲	永久に 膨張	まばら $\rho < \frac{3}{8\pi G} H^2$	有限あるいは無限 (閉あるいは開)

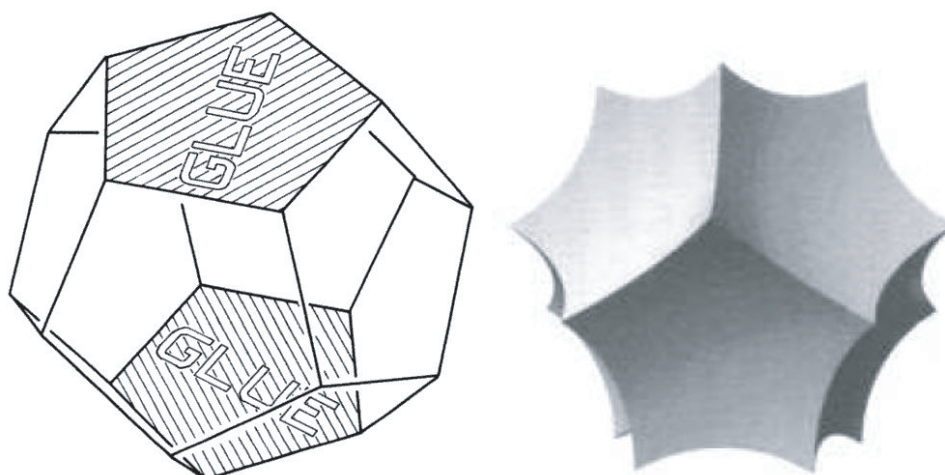
宇宙の大域位相の可能性			
	楕円幾何	ユークリッド幾何	双曲幾何
閉	S^3 , P^3 Poincaré の 十二面体空間	T^3 , 1/4回転多様体, 1/6回転多様体	Seifert-Weber 空間 「ほとんどの」 閉 3-多様体 (第18章参照)
開	なし	E^3 , $T^2 \times E$, $E^2 \times S^1$	H^3 (他の可能性も ある)

例 4.0.6. 12 面体の対面を時計回りに $3/10$ 回転して貼り合わせてできる空間がザイフェルト・ウェーバー 12 面体空間 $SWDS$ である。

12 面体の辺数は $12 \times 5/2 = 30$ 本であり、それらは 5 本ずつ集まり PDS 内では 6 本の辺となる。12 面体の頂点数は $12 \times 5/3 = 20$ 個であり、それは全て一つに集まり PDS 内では 1 個の頂点となる。よって、 $SWDS$ 内の各頂点の周りでは、20 面体のパターンとなる。

$SWDS$ 内で、各辺のまわりには 5 枚の面が集まっている。従って、面角は 72° でなければならない。ところが、ユークリッド空間内では、12 面体の面角は $\tan^{-1}(-2)$ 、即ち 116.565° であるから、 $\mathbb{R}^3$ は $SWDS$ の普遍被覆空間には成り得ない。

そこで、 $\mathbb{H}^3$ 内で 12 面体を考えると、面角がちょうど 72° となる 12 面体が存在することが分かる。よって、 $\pi: \mathbb{H}^3 \rightarrow SWDS$ は普遍被覆である。



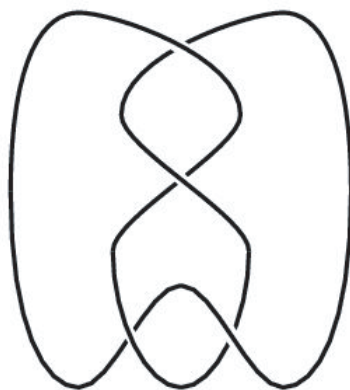
練習問題 4.0.7. 次の多様体はどのような等質幾何を持つか？



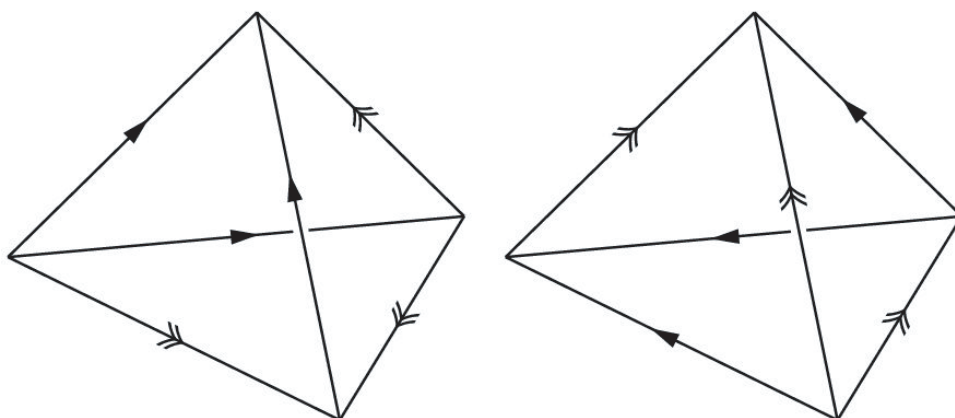
四元数多様体

八面体空間

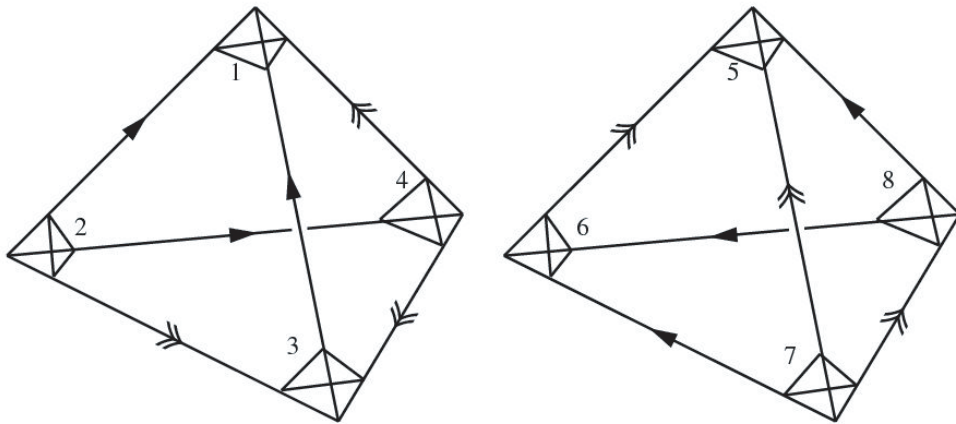
例 4.0.8. 8 の字結び目 $K \subset S^3$ の補空間が双曲構造を持つことを示そう。



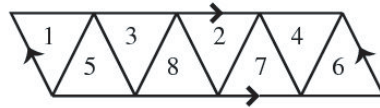
二つの正 4 面体を以下のように貼り合わせて得られる空間を M とする。 M は多様体ではない。何故なら M において、正 4 面体の頂点は一つの頂点 v となり、 v の近傍はトーラス上の錐となっているからである。



ところが、他の点の近傍は 3 次元球体であるから、 $M - v$ は多様体である。

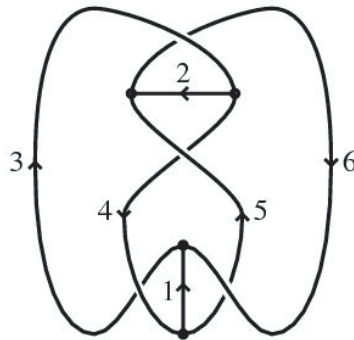


The boundary of an ε neighbourhood of v

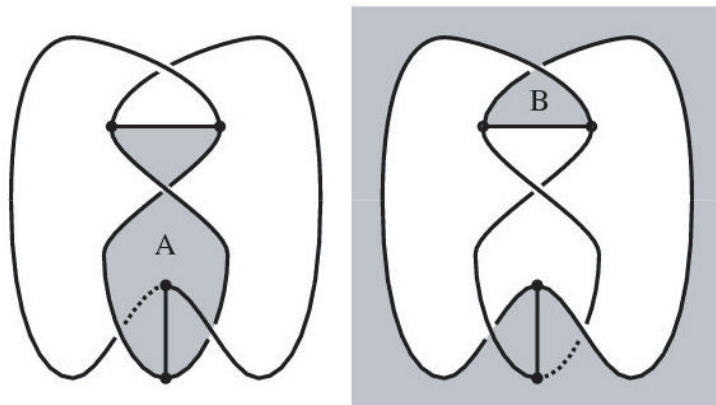


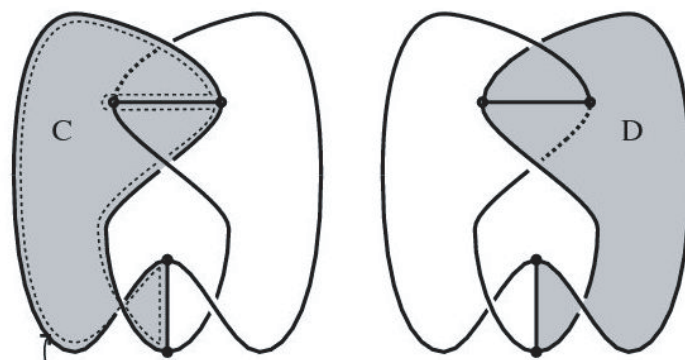
主張 4.0.9. $M - v \cong S^3 - K$

S^3 に埋め込まれた次の胞体複体 K^1 を考える。



次の 4 つの 2 胞体を K^1 に貼り付け、胞体複体 K^2 を得る。

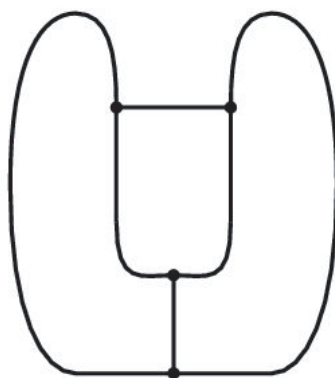




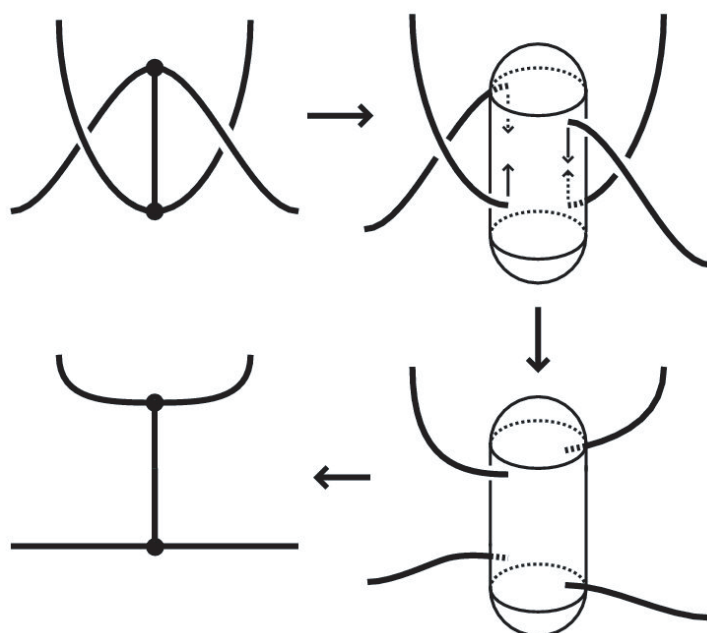
主張 4.0.10. $S^3 - K^2$ は二つの 3 次元球体に同相である。

この主張を示す前に、次の主張を示す。

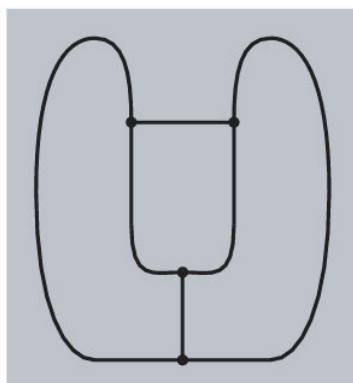
主張 4.0.11. 次の胞体複体を K_1^1 とするとき、 $S^3 - K^1 \cong S^3 - K_1^1$



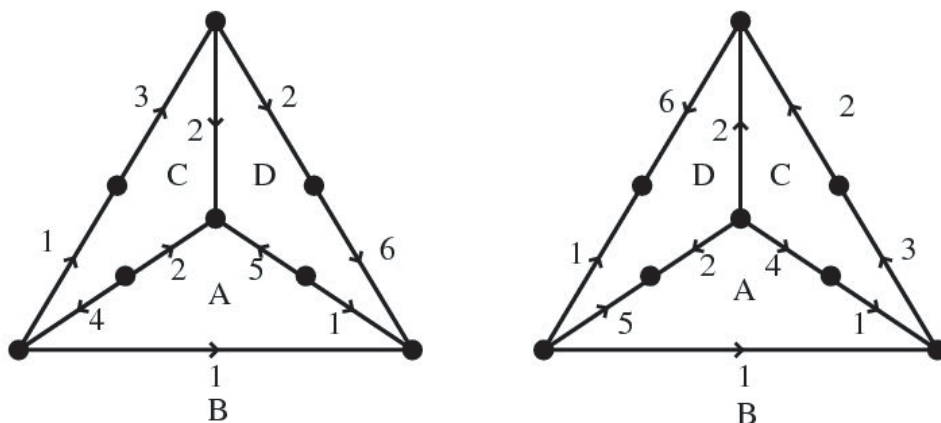
同相写像 h は、1 次元胞体の近傍で行われる。



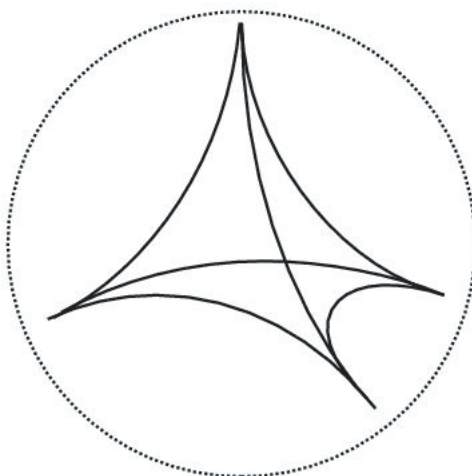
この同相写像 h は K^2 の 2 次元胞体を球面 S^2 上へ移す。



従って、 $S^3 - K^2$ は $S^3 - S^2$ に同相であるので、二つの 3 次元球体と同相である。



4 面体として理想正 4 面体（頂点が無限遠にあるもの）を考えれば、となり合う二つの面角が 60° となるので、各辺の周りで $60 \times 6 = 360^\circ$ となり、 8 の字結び目補空間に双曲構造が入る。



練習問題 4.0.12. ホワイトヘッド絡み目の補空間を二つの理想正 8 面体に分解せよ。

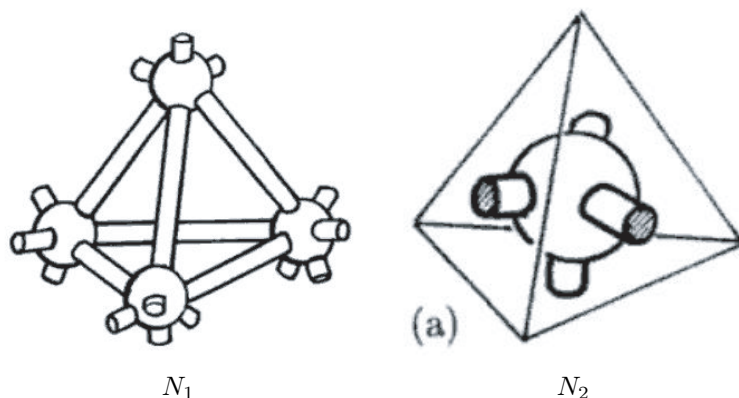
第5章 ヒーガード分解

ヒーガード分解は1904年、ポアンカレによって導入された。

定義 5.0.1. 3 次元多様体 M が二つのハンドル体 V_1, V_2 に分解されたとき、 $M = V_1 \cup V_2$ をヒーガード分解という。 $F = V_1 \cap V_2 = \partial V_1 = \partial V_2$ をヒーガード曲面といい、 F の種数をヒーガード分解の種数という。

定理 5.0.2. 全ての向き付け可能閉 3 次元多様体はヒーガード分解を持つ。

Proof. 3 次元多様体 M を 3 角形分割する。2回重心細分において、1骨格 K_1 と相対1骨格 K_2 の近傍 $N_1 = N(K_1)$ と $N_2 = N(K_2)$ は M のヒーガード分解 $M = N_1 \cup N_2$ を与える。



□

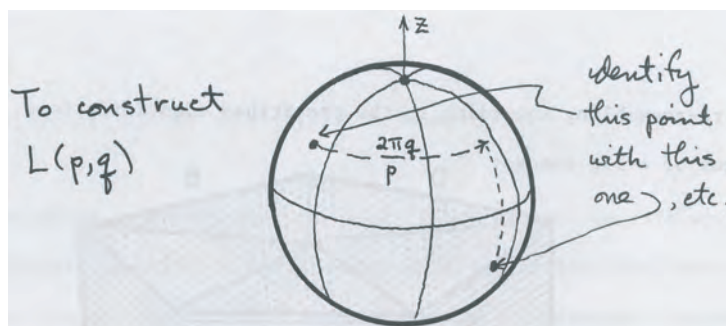
練習問題 5.0.3. 任意の種数 g に対して、 3 次元球面 S^3 は種数 g のヒーガード分解を持つことを示せ。

例 5.0.4. V_1 と V_2 をトーラス体とし、 m_i, l_i を V_i のメリディアンとロンジチュードとする。同相写像 $f: \partial V_2 \rightarrow \partial V_1$ で、 $f(m_2) = pl_1 + qm_1$ により定まるものにより、 V_1 と V_2 を貼り合わせて得られる 3 次元多様体を (p, q) 型のレンズ空間といい、 $L(p, q)$ で表す。

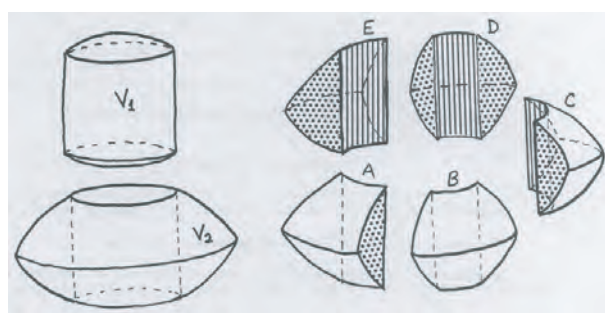
練習問題 5.0.5. 次を示せ。

1. $L(1, q) \cong S^3$
2. $L(0, 1) \cong S^2 \times S^1$
3. $L(2, 1) \cong P^3$

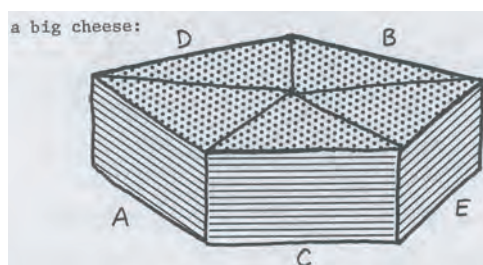
例 5.0.6. レンズ空間 $L(p, q)$ は、 3 次元球体 B^3 の上半球面を $2\pi q/p$ 回転して下半球面に貼り合わせても得られる。



B^3 の $x^2 + y^2 \leq 1/4$ の部分を V_1 、残りを V_2 とおく。 V_1 は上底と下底が $2\pi q/p$ 揃って貼り合い、トーラス体となる。 V_2 もトーラス体である。 $(p=5, q=2)$



V_2 を p 等分して、表面 (∂B^3 であった部分) を貼り合わせると、大きなチーズができる。チーズの上底と下底が貼り合い V_2 ができるので、 V_2 はトーラス体である。



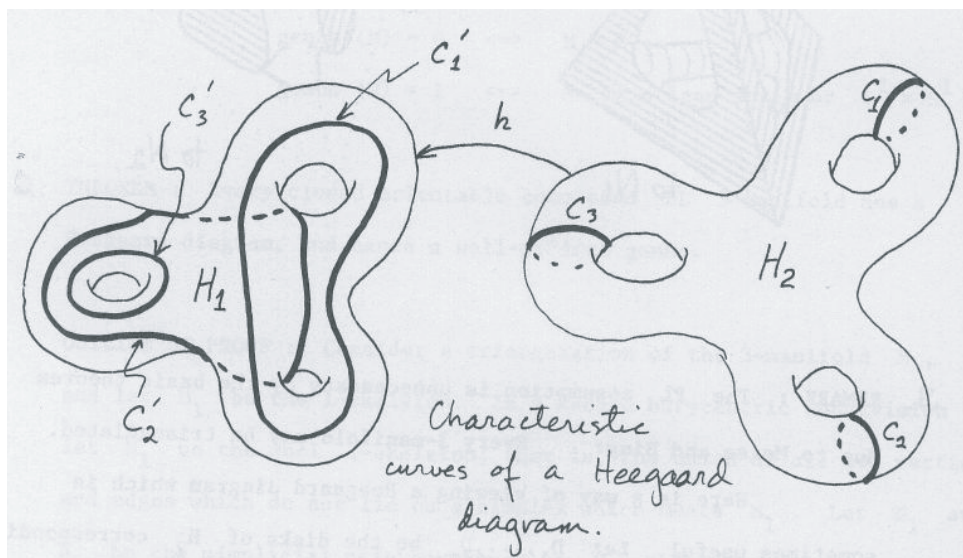
V_2 のメリディアン m_2 は、チーズの側面を一周するループであるので、それは ∂V_1 上ロンジチュード l_1 方向に p 回、メリディアン m_1 方向に q 回周るループと貼り合う。従って、得られる 3 次元多様体はレンズ空間 $L(p, q)$ である。

例 5.0.7. 一般に、 $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ とみなし、同相写像 $f: S^3 \rightarrow S^3$ を $f(z_0, z_1) = (z_0 w, z_1 w^q)$ と定める。ここで、 $w = \exp(2\pi i/p)$ は 1 の原始 p 乗根とする。従って、 f は周期 p で S^3 上に作用する。ある k に対して、 $x = f^k(y)$ となる 2 点 x, y を同一視することにより、レンズ空間 $L(p, q)$ が得られる。

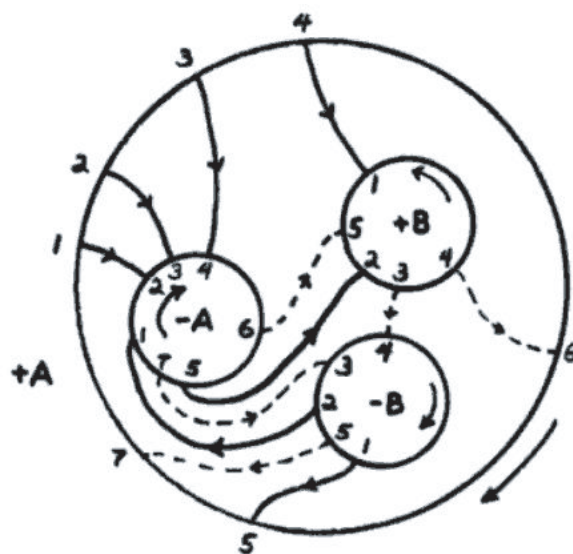
以上により、 $\pi: S^3 \rightarrow L(p, q)$ は普遍被覆であり、 $\pi_1(L(p, q)) = \mathbb{Z}_p$ である。

定義 5.0.8. 種数 g のハンドル体 V 内に適切に埋め込まれたディスク $D_1 \cup \dots \cup D_g$ が V を一つの 3 次元球体に切り開くとき、 $\{D_1 \cup \dots \cup D_g\}$ をメリディアンディスクシステムという。

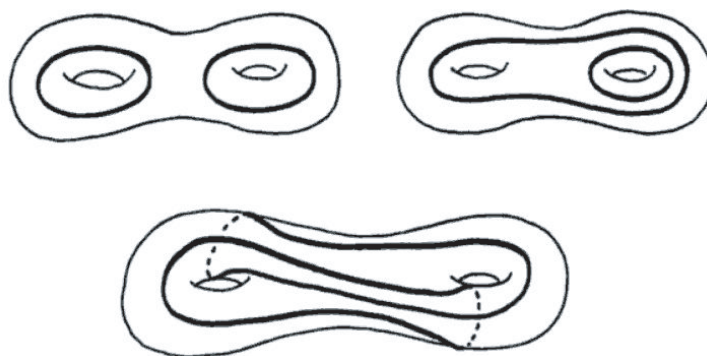
$M = V_1 \cup V_2$ をヒーガード分解とし、 $\{D_1 \cup \dots \cup D_g\}$ を V_2 のメリディアンディスクシステムとする。このとき、 ∂V_1 上のループ $\partial D_1 \cup \dots \cup \partial D_g$ をヒーガード図式という。



例 5.0.9. ポアンカレ 12 面体空間は、種数 2 のヒーガード分解を持つ。この図は、 ∂V_1 をメリディアンディスクシステムで切り開いた平面的曲面上のヒーガード図式である。



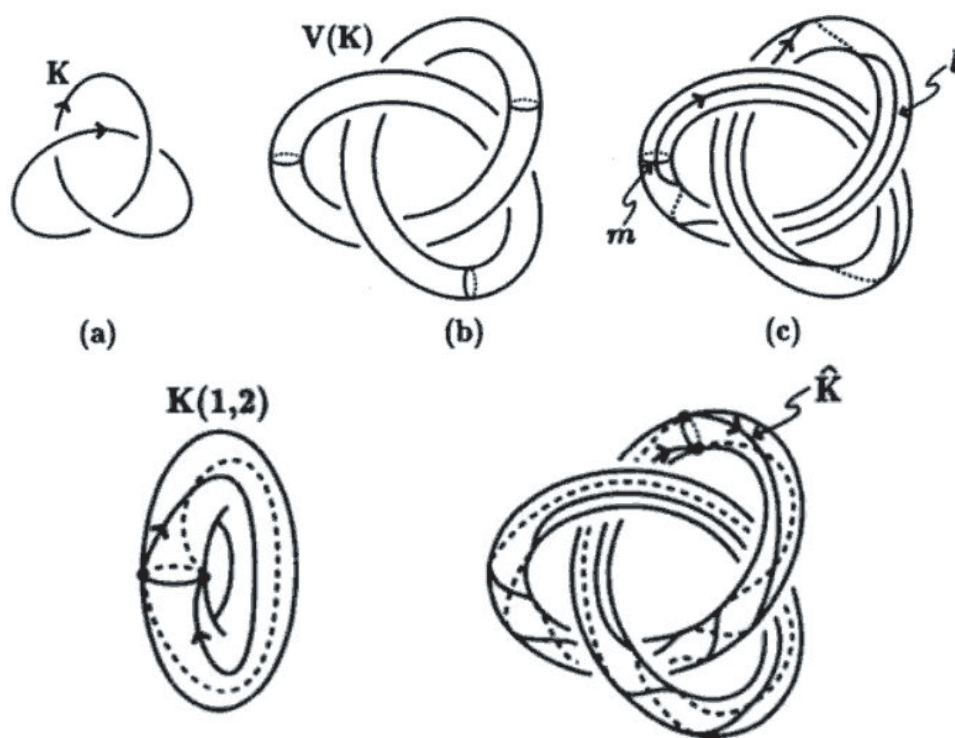
練習問題 5.0.10. 次のヒーガード図式を持つ多様体は何か？



第6章 デーン手術

定義 6.0.1. K を S^3 内の結び目とし、 $m, l \subset \partial N(K) = \partial E(K)$ をそれぞれメリディアンとロンジチュードとする。

S^3 からトーラス体 $N(K)$ を抜き取り、同相写像 $f: \partial N(K) \rightarrow \partial E(K)$ で、 $f(m) = pl + qm$ となるものにより、再び $N(K)$ と $E(K)$ を貼り合わせて得られる 3次元多様体を K に沿ってスロープ q/p でデーン手術して得られた多様体といい、 $K(q/p)$ で表す。



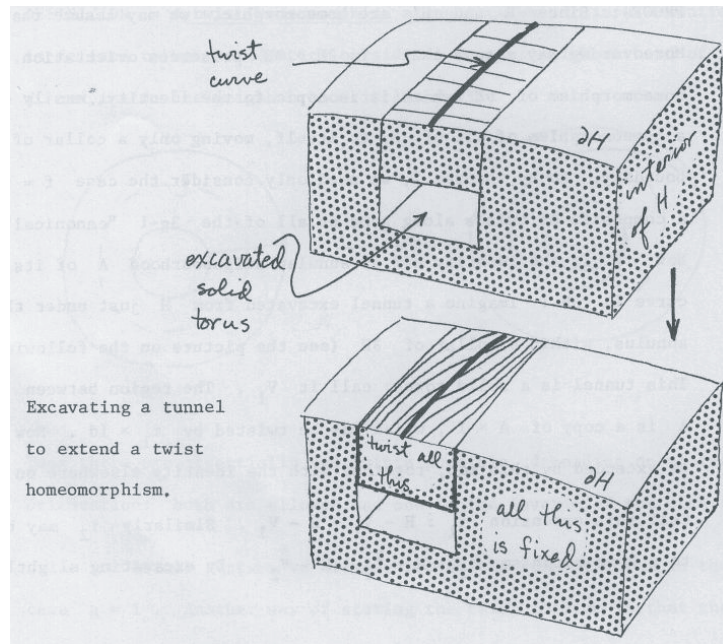
例 6.0.2. 自明な結び目に沿ってスロープ q/p でデーン手術すると、レンズ空間 $L(q, p)$ が得られる。

定理 6.0.3. 任意の向き付け可能閉 3次元多様体 M は、 S^3 内の絡み目に沿ったデーン手術で得られる。

Proof. 定理 5.0.2 により、 M は種数 g のヒーガード分解を持つ。また、 S^3 は同じ種数 g のヒーガード分解を持つ。

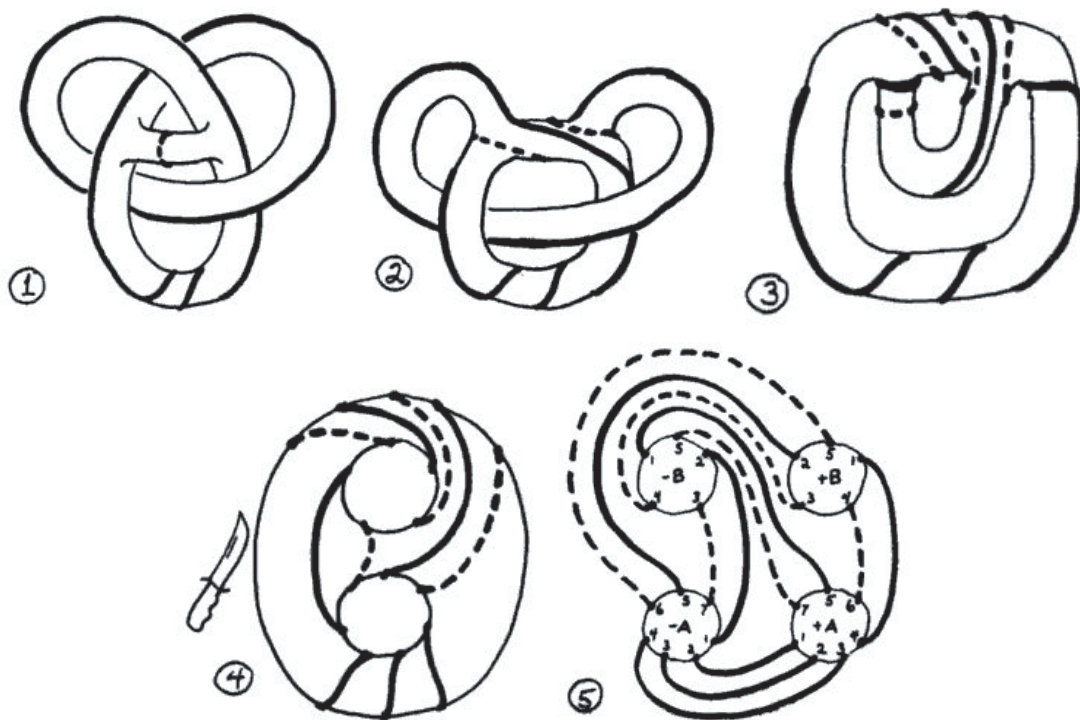
$$S^3 = V_1 \cup V_2, \quad M = V'_1 \cup V'_2$$

S^3 内の絡み目に沿ったデーン手術で M を得るためには、 S^3 のヒーガード図式を擦じることで、 M のヒーガード図式を得れば良い。これは、ハンドル体 V_1 内に絡み目を入れ、スロープ ± 1 でデーン手術をすれば実現できる。



□

例 6.0.4. K を右手系三葉結び目とすると、 $K(+1)$ はポアンカレ 12 面体空間と同相である。



三葉結び目の補空間の基本群は

$$\pi_1(S^3 - K) = \langle x, y | xyx = yxy \rangle$$

であり、 $\partial N(K)$ 上のスロープ $+1$ のループは、

$$yx(xy x^{-1})x^{-2} = yx^2yx^{-3}$$

と表せるから、

$$\pi_1(K(+1)) = \langle x, y | xyx = yxy, yx^2y = x^3 \rangle$$

である。 $z = xy$ とおくことにより、

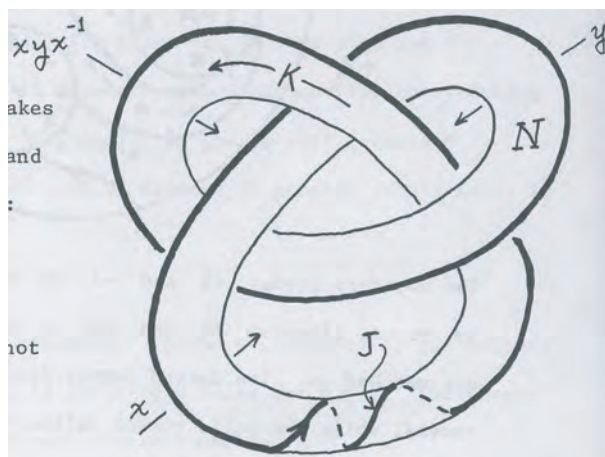
$$\pi_1(K(+1)) = \langle x, z | zx = x^{-1}z^2, x^{-1}zxz = x^3 \rangle$$

$$\pi_1(K(+1)) = \langle x, z | (zx)^2 = z^3 = x^5 \rangle$$

を得る。これを可換化すれば、

$$H_1(K(+1)) = 0$$

となるので、予想 0.0.1 の反例となっている。



練習問題 6.0.5. $\pi_1(S^3 - K) = \langle x_1, \dots, x_n | r_1, \dots, r_n \rangle$ のとき、

$$\pi_1(K(q/p)) = \langle x_1, \dots, x_n | r_1, \dots, r_n, m^q l^p = 1 \rangle$$

$$H_1(K(q/p)) = \mathbb{Z}_q$$

であることを示せ。

任意の $q/p \neq \infty$ に対して、 $\pi_1(K(q/p)) \neq 1$ のとき、 K は Property P を持つという。従って、結び目が Property P を持てば、デーモン手術によってポアンカレ予想の反例は作れない。全ての非自明な結び目が Property P を持つという Property P 予想は 2004 年に解かれた。

定理 6.0.6 (P. B. Kronheimer-T. S. Mrowka, P. Ozsvath-Z. Szabo). 任意の非自明な結び目は Property P を持つ。

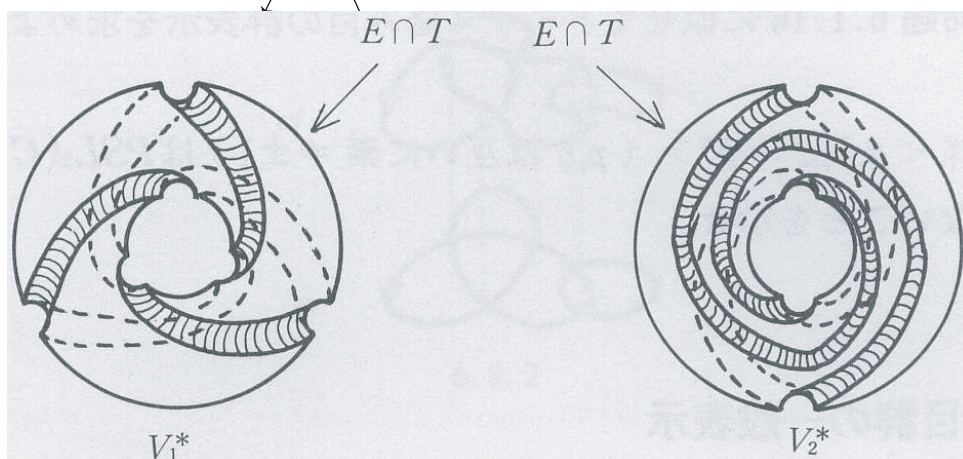
第7章 ザイフェルト多様体

M がザイフェルト多様体であるとは、 M がループの和 $\cup l_\lambda$ ($\lambda \in \Lambda$) で表されていて、任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して、 $N(l_\lambda)$ が (p, q) 型ファイバー構造を持ったソリッドトーラスとなっているときをいう。

(p, q) 型ファイバー構造を持ったソリッドトーラス

ザイフェルト多様体 M のファイバーが、 $(1, q)$ 型ファイバー構造を持ったソリッドトーラスを近傍に持つとき正則ファイバーと呼び、それ以外を特異ファイバーと呼ぶ。

練習問題 7.0.1. トーラス結び目の外部 $E(K)$ はザイフェルト多様体であることを示せ。また、そのファイバー構造は S^3 に拡張できることを示せ。



$(2, 3)$ 型トーラス結び目の外部のソリッドトーラスへの分解

ザイフェルト多様体 M の各ファイバーを 1 点とみなした商空間 B を M の底空間という。底空間 B の点 x の引き戻しが正則ファイバーのとき x を正則点といい、特異ファイバーのとき x を特異点という。

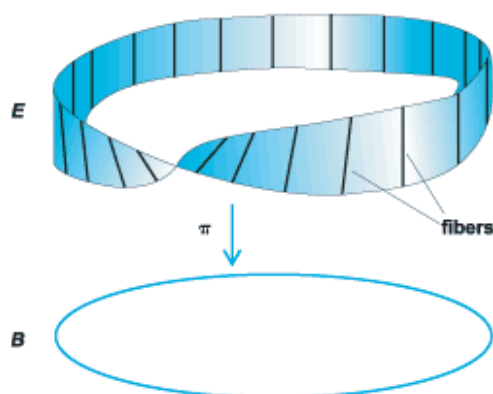
練習問題 7.0.2. トーラス結び目の外部 $E(K)$ の底空間と特異点を求めよ。

トーラスを境界に持ついくつかのザイフェルト多様体を境界で貼り合わせて得られる多様体をグラフ多様体という。

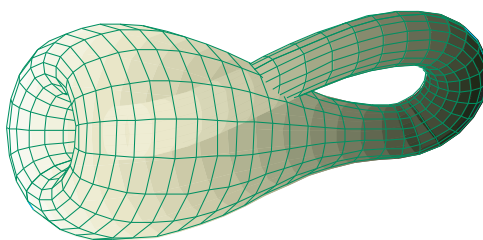
ファイバー束

ファイバー束とは、局所的に2つの空間の直積で表せる空間である。

円柱の側面 $S^1 \times I$ は、 S^1 の各点に対して I を直積しているの、 S^1 を底空間とする I 束である。メビウスの帯 $S^1 \tilde{\times} I$ も、 S^1 の各点に I を“直積”しているが、 S^1 に沿って一周したとき、 I の向きが入れ替わっている。メビウスの帯も S^1 を底空間とする I 束という。

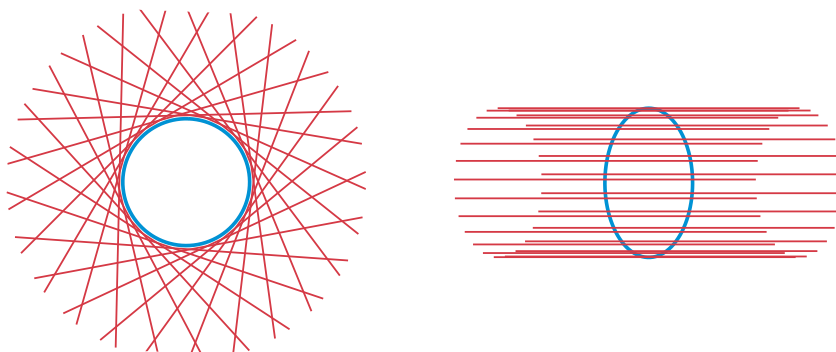


クラインの壺は S^1 を底空間とする S^1 束である。



微分可能多様体 M を底とし、各点 $p \in M$ における接空間 $T_p(M)$ をファイバーとするファイバー束を、接ベクトル束という。

$$T(M) = \bigcup_{p \in M} T_p(M)$$

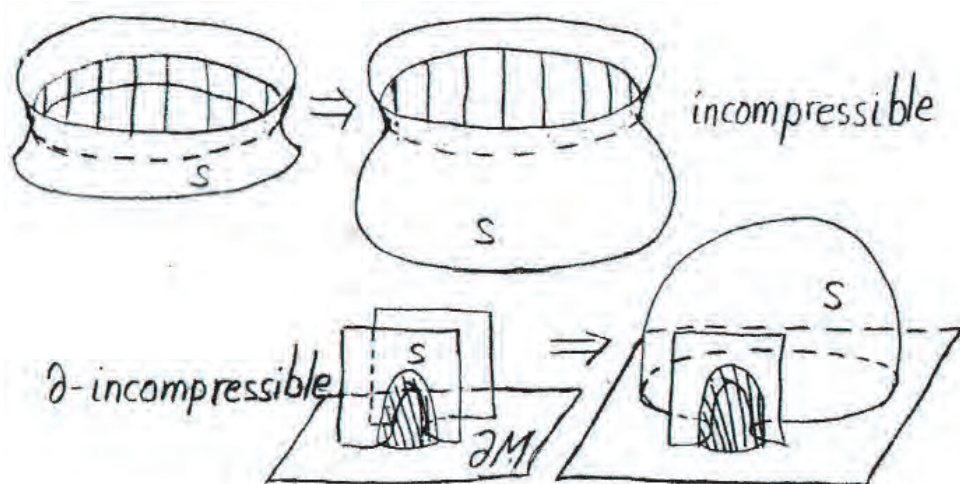


第8章 ハーケン多様体

M を 3 次元多様体とし、 F を M 内に適切に埋め込まれた両側曲面とする。以下を満たすとき、 F は圧縮可能であるという。

1. $F = S^2$ のとき、 $\partial B^3 = S^2$ となる 3 次元球体 B^3 が M 内に存在する。
2. $F = D^2$ のとき、 $\partial B^3 = D^2 \cup (B^3 \cap \partial M)$ となる 3 次元球体 B^3 が M 内に存在する。
3. F がそれ以外の場合、 $D \cap F = \partial D$ が F 内で本質的となるディスク D が存在する。

F が圧縮可能でないとき、圧縮不可能であるという。



ハーケン多様体は、圧縮不可能曲面で次々と切り開くことにより、最終的にいくつかの 3 次元球体に分解される。これをハーケン階層という。

$$(M_1, F_1) \rightarrow (M_2, F_2) \rightarrow \cdots \rightarrow (M_n, F_n)$$

ここで、 $F_i \subset M_i$ は圧縮不可能曲面で、 $M_{i+1} = M_i - \text{int}N(F_i)$ である。

定理 8.0.1 (Waldhausen). M_1 と M_2 をハーケン多様体とすると、

$$\pi_1(M_1) \cong \pi_1(M_2) \Rightarrow M_1 \cong M_2$$

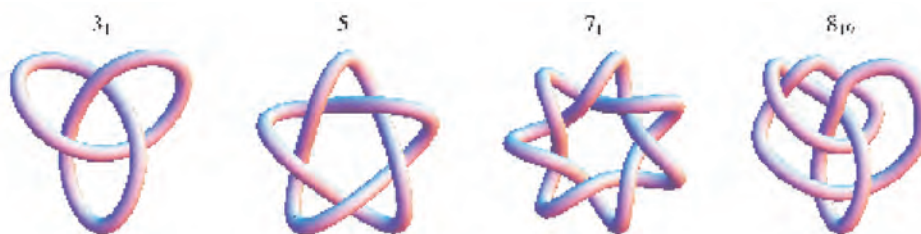
である。

定理 8.0.2 (Thurston). ハーケン多様体について、幾何化予想は正しい。

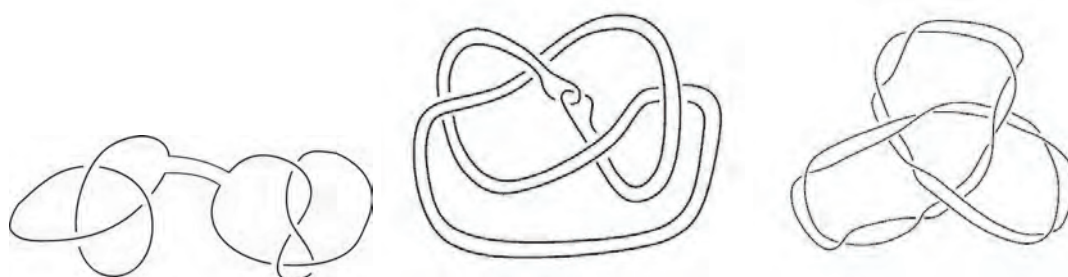
任意の結び目に対して、圧縮不可能なサイフェルト曲面が存在するので、結び目の外部はハーケン多様体である。サーストンの定理により、結び目は 3 種類に分類される。

定理 8.0.3. 結び目は次の 3 種類に分類される。

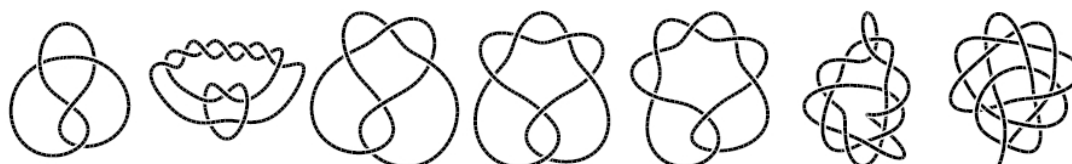
1. トーラス結び目
2. サテライト結び目
3. 双曲結び目



トーラス結び目



サテライト結び目



双曲結び目

練習問題 8.0.4. トーラス結び目の外部には、境界平行でない圧縮不可能なアニュラスが存在することを示せ。

練習問題 8.0.5. サテライト結び目の外部には、境界平行でない圧縮不可能なトーラスが存在することを示せ。

練習問題 8.0.6. 合成結び目はサテライト結び目であることを示せ。

練習問題 8.0.7. 最小種数のザイフェルト曲面は圧縮不可能であることを示せ。

ザイフェルト曲面は結び目外部で非分離的であるが、カラーとシャーレンは分離的な曲面が結び目外部に存在することを示した。

定理 8.0.8 (M. Culler and P. B. Shalen). 非自明な結び目の外部には、境界平行でない分離的な圧縮不可能曲面が存在する。

従って、非自明な結び目の外部には、少なくとも二つの境界平行でない圧縮不可能な曲面が存在する。

第9章 球面・トーラス分解

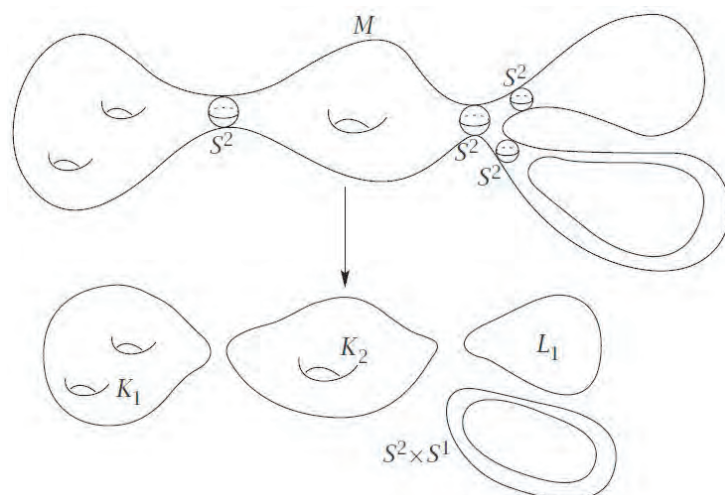
S^3 でない 3 次元多様体が圧縮不可能な球面を含まないとき、素であるという。

3 次元多様体を圧縮不可能な球面により分解し、3 次元球体で蓋をすることにより、いくつかの素な多様体を得られる。この分解を球面分解（素分解）という。

素分解は一意的である。

定理 9.0.1 (Kneser, Milnor). $M = M_1 \# \cdots \# M_n = N_1 \# \cdots \# N_m$ を素分解とする。このとき、 $n = m$ であり、 $\{M_1, \dots, M_n\} = \{N_1, \dots, N_m\}$ が成り立つ。

素分解ができない多様体は既約であるという。

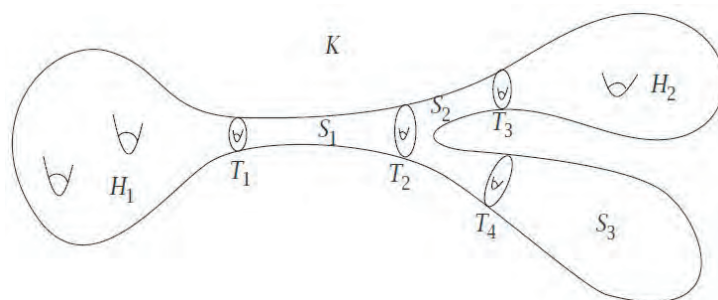


3 次元多様体が境界に平行でない圧縮不可能なトーラスを含まないとき、単純であるという。

既約な閉 3 次元多様体を圧縮不可能トーラスにより分解し、いくつかの単純多様体とザイフェルト多様体を得られる。この分解をトーラス分解という。

トーラス分解も一意的である。

定理 9.0.2 (Jaco, Shalen, Johannson). $M = M_1 \# \cdots \# M_n = N_1 \# \cdots \# N_m$ をトーラス分解とする。このとき、 $n = m$ であり、 $\{M_1, \dots, M_n\} = \{N_1, \dots, N_m\}$ が成り立つ。

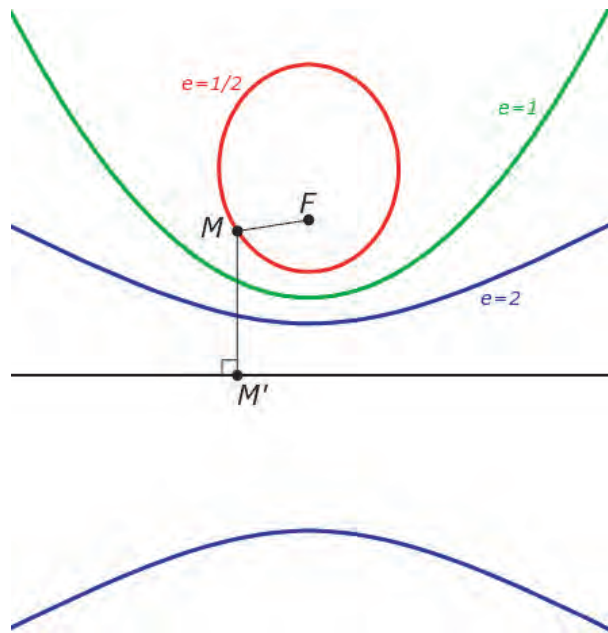


第10章 幾何化予想

2次曲線の分類

2次曲線は、離心率 e により3種類に分類される。

1. $0 < e < 1$ のとき、楕円
2. $e = 1$ のとき、放物線
3. $1 < e$ のとき、双曲線

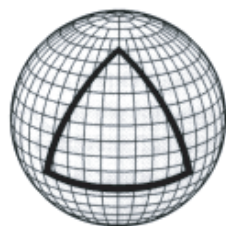


練習問題 10.0.1. 2次曲面を分類せよ。

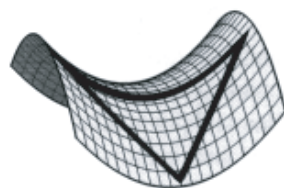
幾何学の分類

一般に、幾何学は3種類に分類される。

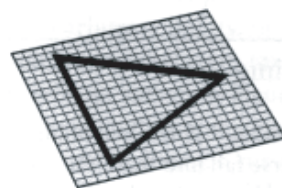
1. 楕円幾何学
2. ユークリッド幾何学
3. 双曲幾何学



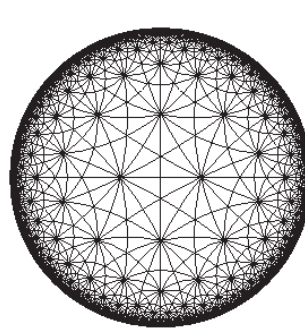
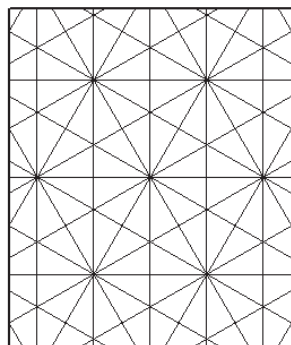
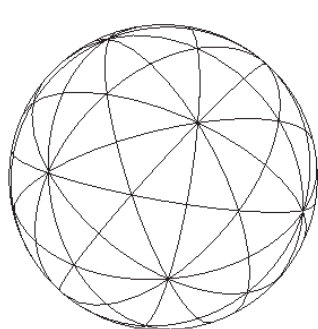
Positive Curvature



Negative Curvature



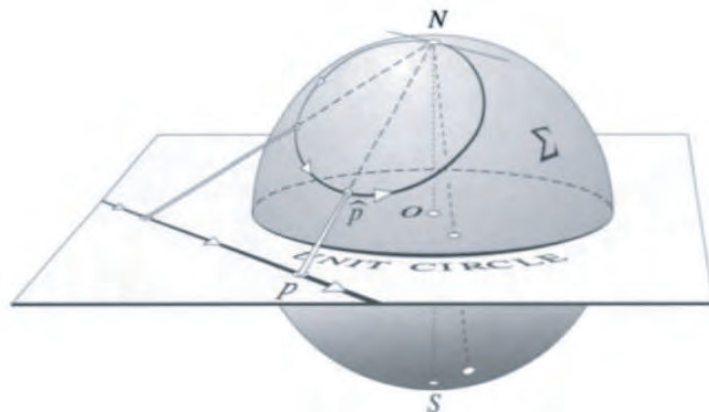
Flat Curvature



	球面幾何	ユークリッド幾何	双曲幾何
平行線	0 本	1 本	∞ 本
三角形の内角の和	$> 180^\circ$	$= 180^\circ$	$< 180^\circ$
円周の長さ	$< 2\pi r$	$= 2\pi r$	$> 2\pi r$
曲率	> 0	$= 0$	< 0

メビウス変換

立体射影により、複素平面 $\mathbb{C}$ に無限遠点 ∞ を加えた集合 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ とリーマン球面 $\hat{\mathbb{C}}$ が対応する。



2 次の特特殊線形群

$$SL(2, \mathbb{C}) = \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc = 1 \right\}$$

を同値関係 $A \sim -A$ で割って得られる群を $PSL(2, \mathbb{C})$ という。 $PSL(2, \mathbb{C})$ は、メビウス変換（偶数個の鏡映変換の合成で表される変換）

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

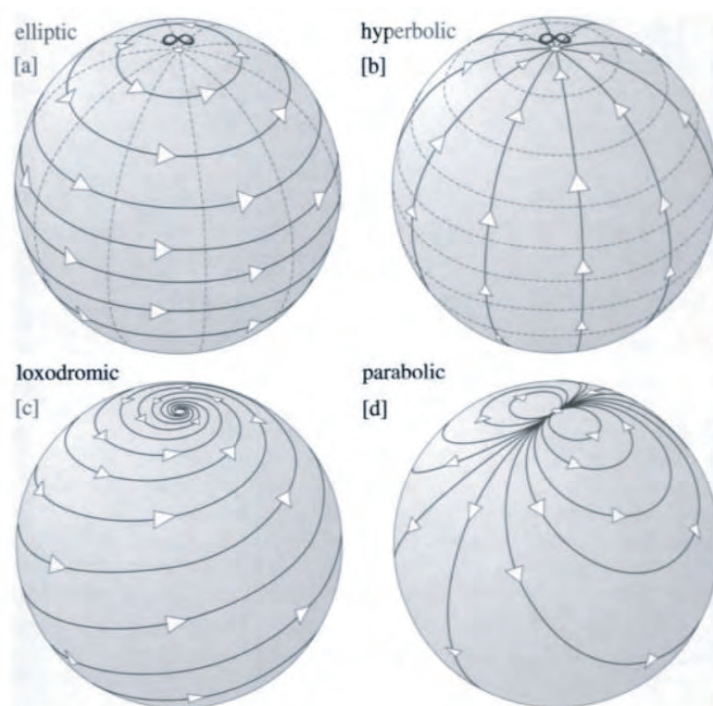
として、リーマン球面 $\hat{\mathbb{C}}$ に作用する。この作用は、ポアンカレ拡張

$$T : (z, t) \rightarrow (T(z), t') \quad (z \in \mathbb{C}, t, t' \in \mathbb{R}_{>0})$$

により、上半空間 $\mathbb{H}^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z > 0\}$ への作用に拡張される。

メビウス変換はトレースの 2 乗 $tr^2(T) = (a + d)^2$ により分類される。

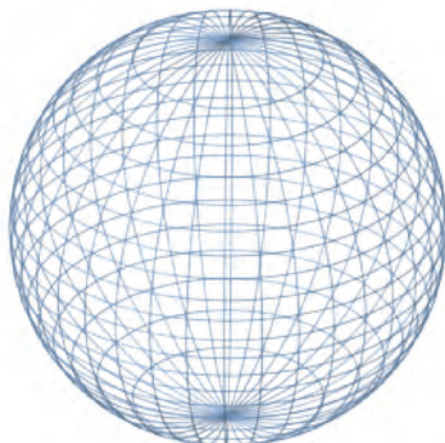
1. $0 \leq tr^2(T) < 4$ のとき、楕円型
2. $tr^2(T) = 4$ のとき、放物型
3. $4 < tr^2(T)$ のとき、双曲型
4. $tr^2(T) \notin [0, 4]$ のとき、斜航的



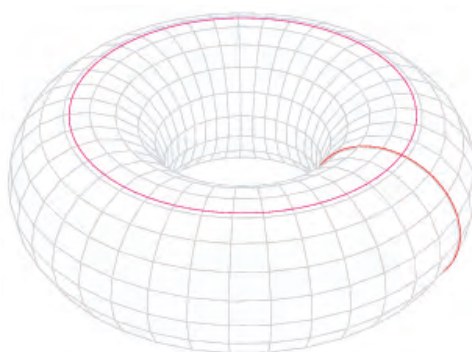
内在的幾何と外在的幾何

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内の 2 次元球面 S^2 は、内在的幾何（ S^2 内での計量）と外在的幾何（ $\mathbb{R}^3$ の計量の S^2 への制限）が一致している。

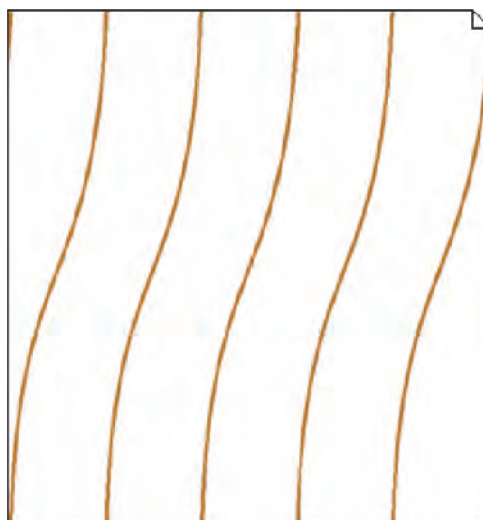
球面の一部を局所的に切り取って、球面の他の部分にそのまま置くことができる。



一方、ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内のトーラス T^2 は、内在的幾何と外在的幾何が一致していない。
 トーラスの外側の一部（曲率が正の部分）を局所的に切り取って、トーラスの内側の部分（曲率が負の部分）にそのまま置くことはできない。



内在的幾何による測地線は、トーラスを長方形に切り開いたとき、ユークリッド平面での直線となるが、
 外在的幾何による測地線は、直線にはならない。

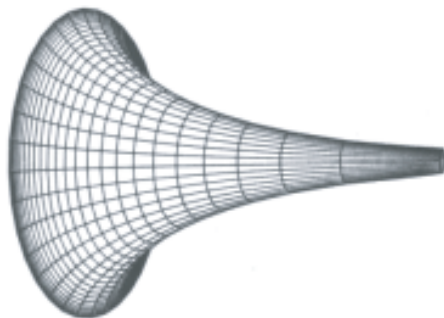


定曲率 0 のトーラスは 3 次元ユークリッド空間内で内在的幾何と外在的幾何が一致するように埋め込むことはできないが、4 次元ユークリッド空間内であれば可能である。 T^2 を $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ の直積とみなして、

$T^2 = S^1 \times S^1 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$ と考えれば、内在的幾何と外在的幾何が一致するように埋め込み可能である。

定曲率 -1 の球面（半径 $\sqrt{-1}$ の球面）は擬球と呼ばれる。擬球は、内在的幾何と外在的幾何が一致するようにユークリッド空間に埋め込まれている。

擬球の一部を局所的に切り取って、擬球の他の部分にそのまま置くことができる。



任意のリーマン多様体は、ある次元のユークリッド空間に内在的幾何と外在的幾何が一致するように埋め込み可能だろうか？これを「リーマン多様体の埋め込み問題」といい、1956年に（映画「ビューテフルマインド」のモデルとなった）ジョン・ナッシュにより解決された。([11])

双曲幾何学

$S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ にユークリッド計量

$$dx^2 = dx_0^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_n^2$$

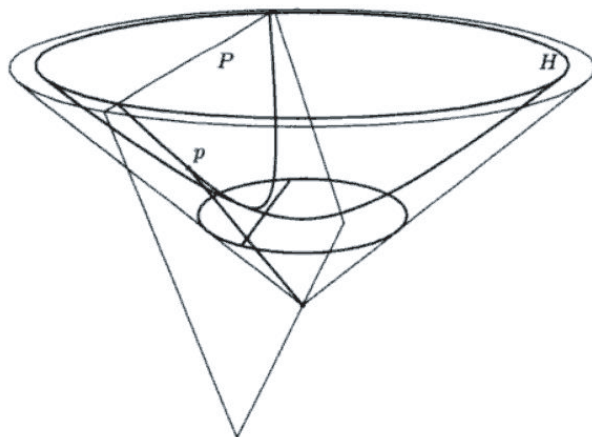
を制限し、定曲率 1 のリーマン計量が得られる。

一方、双曲面 $\{-dx_0^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_n^2 = -1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ に計量

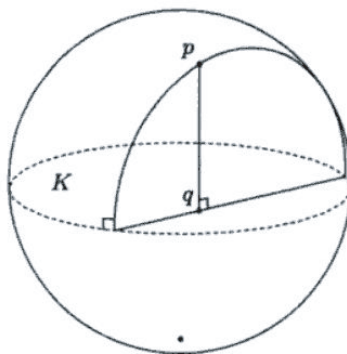
$$ds^2 = -dx_0^2 + dx_1^2 + \cdots + dx_n^2$$

を制限すると、定曲率 -1 のリーマン計量が得られる。これを双曲面モデルという。

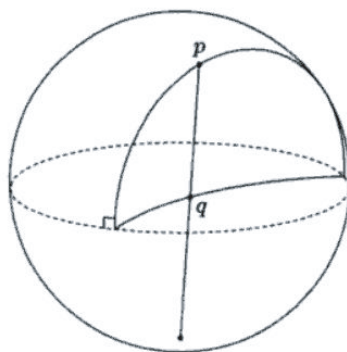
双曲面モデルでは、測地線は原点を通る 2 次元平面と双曲面との共通部分である。双曲面モデルを超平面 $\{x_0 = 1\}$ 上の単位ディスクへ射影し、射影モデル（クラインモデル）を得る。射影モデルでは、測地線はまっすぐな線分である。



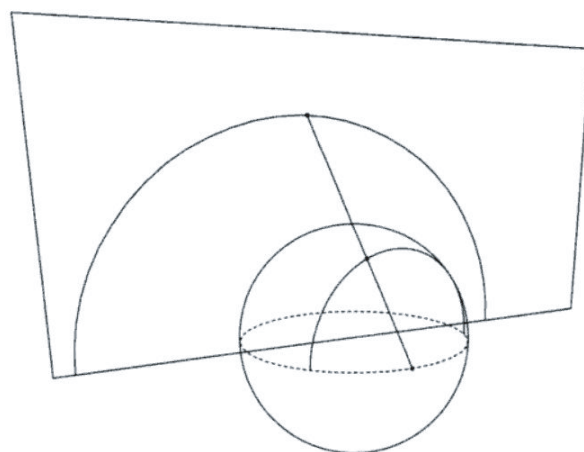
クラインモデルは、半球モデルの赤道ディスクへのユークリッド直交射影により得られる。

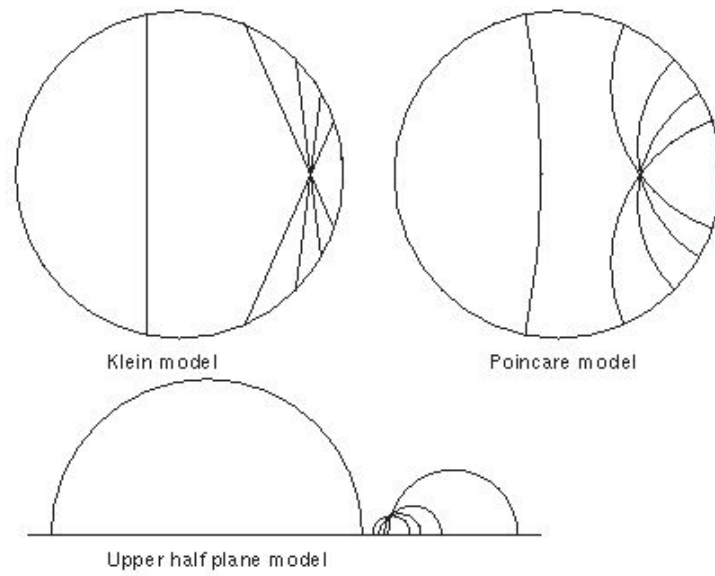


半球モデルから、南極点へ向かって赤道ディスクへ立体射影することによりポアンカレディスクモデルが得られる。ポアンカレディスクモデルでは、測地線は境界に直交する円弧である。

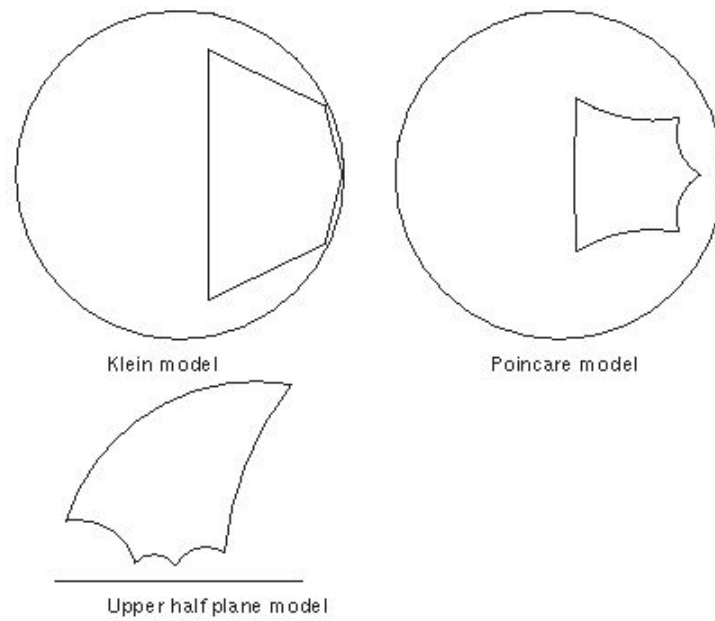


半球モデルから、赤道上の点 $(0, \dots, 0, 1)$ から垂直な部分空間 $\{x_n = 0\}$ へ射影することにより上半空間モデルが得られる。上半空間モデルでは、測地線は境界平面に直交する半円か、垂直な半直線である。





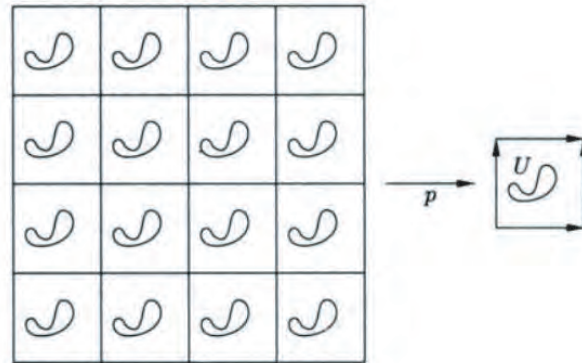
各モデルでの測地線



各モデルでの5角形

幾何化予想

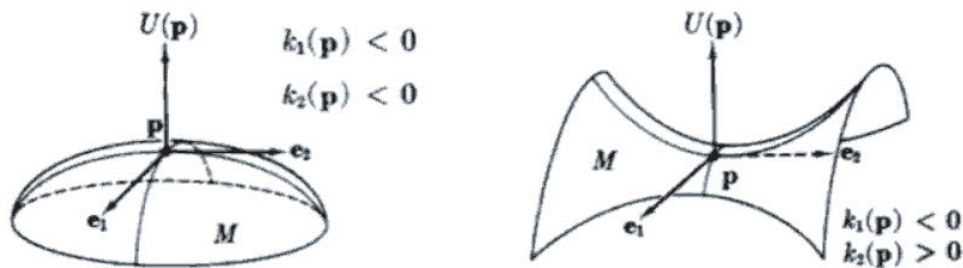
例 10.0.2. 被覆写像 $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ に対して、被覆変換群 $\mathbb{Z}^2$ が等長的なので、トーラスにユークリッド幾何構造（すなわち、局所的にはユークリッド空間と等長的であるような計量）を与えることができる。



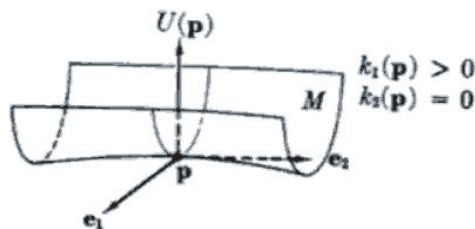
同様に、射影平面 P^2 は球面幾何構造を持ち、種数 2 の向き付け可能閉曲面 $T^2 \# T^2$ は双曲幾何構造を持つ。

定理 10.0.3. 閉 2 次元多様体は、 S^2 , $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{H}^2$ のいずれかをモデルとする幾何構造を持つ。

ガウス曲率 K は、主曲率（最大曲率と最小曲率）の積で定義される。従って、球面 S^2 のガウス曲率は $+1$ 、ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ のガウス曲率は 0 、双曲平面 $\mathbb{H}^2$ のガウス曲率は -1 となる。



また、ユークリッド平面を折り畳むように丸めた曲面では、最小曲率が 0 である為、ガウス曲率はユークリッド平面と同じ 0 である。ガウス曲率は曲面を伸縮せずに丸めたりうねらせたりしても変化しない（ガウスの Theorema Egregium）。



定理 10.0.4. ユークリッド平面 $\mathbb{R}^2$ 上の三角形の内角を α , β , γ とし、面積を A で表すと、

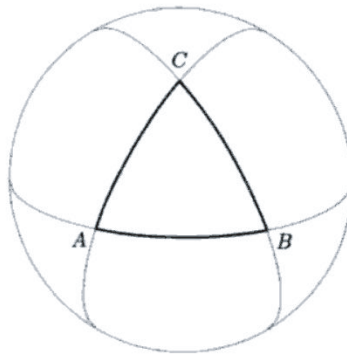
$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

である。

定理 10.0.5. 球面 S^2 上の三角形の内角を α , β , γ とし、面積を A で表すと、

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + A$$

である。

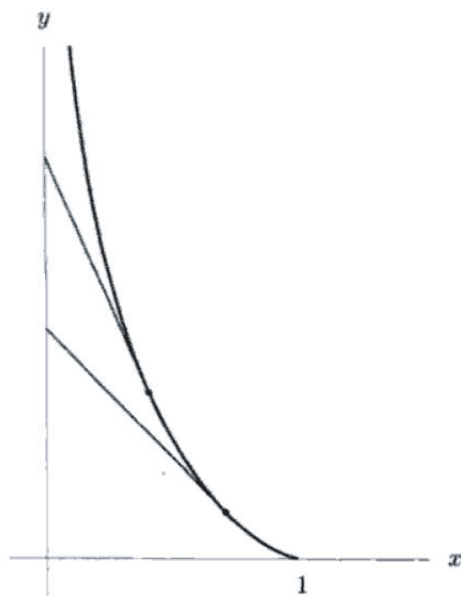


定理 10.0.6. 双曲平面 $\mathbb{H}^2$ 上の三角形の内角を α, β, γ とし、面積を A で表すと、

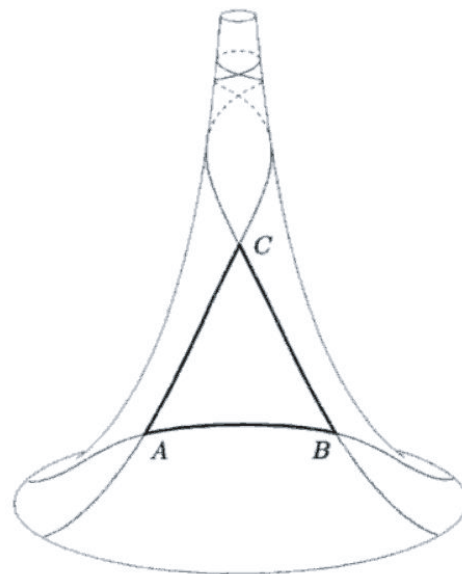
$$\alpha + \beta + \gamma = \pi - A$$

である。

牽引線とは、各点での接線と y 軸との交点との距離が常に 1 である曲線である。牽引線を回転させるとガウス曲率が -1 の擬球ができる。半径 r の球面のガウス曲率は $\frac{1}{r^2}$ であるから、擬球は“半径 $\sqrt{-1}$ の球面”と言える。



牽引線



擬球上の三角形

定理 10.0.4、10.0.5、10.0.6 を一般化すると次の定理が得られる。

定理 10.0.7. ガウス曲率 k が一定の曲面上の三角形の内角を α, β, γ とし、面積を A で表すと、

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + kA$$

である。

定理 10.0.8 (ガウス - ボンネの定理). ガウス曲率 k が一定であり、曲面の面積を A 、オイラー標数を χ とすると、

$$kA = 2\pi\chi$$

が成り立つ。

Proof. 手順のみを示す。

1. 曲面を胞体分割する。 v を頂点の個数、 e を辺の本数、 f を面の枚数とする。
2. n_i 角形の面積を A_i とし、内角の和を θ_i とすると、 $kA_i = \theta_i - (n_i - 2)\pi$ が成り立つ。
3. n_i 角形の面積の総和をとると、 $\sum_i kA_i = \sum_i (\theta_i - (n_i - 2)\pi) = \sum_i \theta_i - \sum_i n_i \pi + \sum_i 2\pi$
4. $\sum_i A_i = A$ 、 $\sum_i \theta_i = 2\pi v$ 、 $\sum_i n_i = 2e$ 、 $\sum_i 1 = f$ であるから、 $kA = 2\pi(v - e + f) = 2\pi\chi$ が成り立つ。

□

次の定理が、ペレルマンによって解決された予想である。

定理 10.0.9 (サーストンの幾何化予想). 閉 3 次元多様体を球面分解し、トーラス分解すると、各成分は幾何構造を持つ。

実際、サーストンは 3 次元多様体を取り得る幾何を全て分類している。

定理 10.0.10. 3 次元多様体が許容し得る幾何構造は、 $\mathbb{E}^3$, S^3 , $\mathbb{H}^3$, $S^2 \times \mathbb{R}$, $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, $\tilde{SL}_2$, Nil , Sol の 8 つのうちのいずれかである。

サーストンの幾何化予想の解決から、ポアンカレ予想の肯定的解決が従う。 M を単連結な 3 次元多様体とし、球面分解 $M = M_1 \# \cdots \# M_n$ する。各 M_i は単連結であるから、トーラス分解はされない。定理 10.0.9 より、各 M_i は幾何構造を持つ。即ち、 $M_i = S^3/\Gamma$ と表されるが、 M_i は単連結であるから Γ は自明でなければならない。従って、 $M_i = S^3$ となり、 $M = S^3$ である。

例 10.0.11 (楕円幾何). S^3 の幾何。

楕円多様体の例：3 次元球面、3 次元射影空間、ポアンカレの 12 面体空間

例 10.0.12 (ユークリッド幾何). $\mathbb{R}^3$ の幾何。

ユークリッド多様体の例：3 次元トーラス、 $1/4$ 回転多様体、半回転多様体、 $1/6$ 回転多様体、 $1/3$ 回転多様体

例 10.0.13 (双曲幾何). $\mathbb{H}^3$ の幾何。

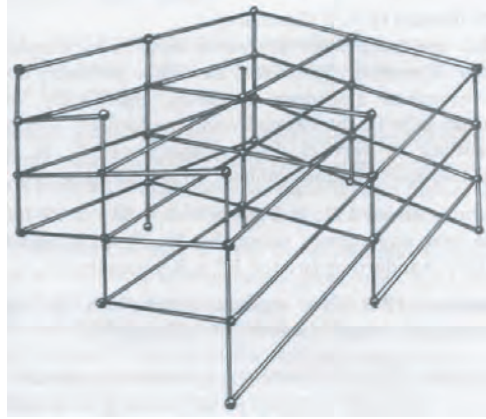
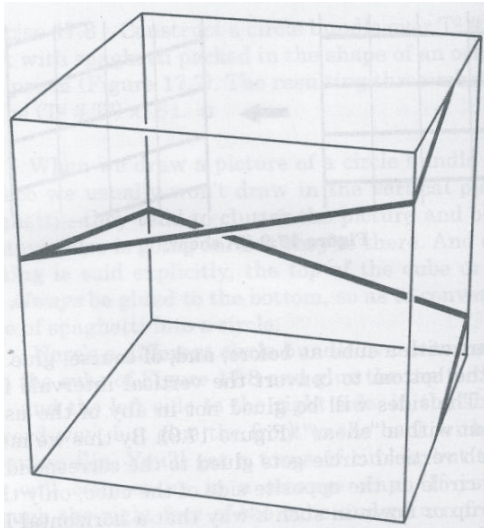
双曲幾何の例：ザイフェルト・ウェバー 12 面体空間、その他沢山 (双曲幾何が一番多い)

例 10.0.14 ($S^2 \times \mathbb{R}$ 幾何). $S^2 \times \mathbb{R}$ の例： $S^2 \times S^1$ 、 K^3 、 $P^2 \times S^1$

例 10.0.15 ($\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ 幾何). $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ 多様体の例：(種数 2 の向き付け可能閉曲面を 8 角形の貼り合わせとみなして、) $1/8$ 回転、 $1/4$ 回転、 $3/8$ 回転、半回転多様体

例 10.0.16 (捩れたユークリッド幾何 (T^2 上の非自明な S^1 束)). Nil の幾何

立方体で、上面を底面に貼り付け、側面を図の線が貼り合うように捩じって貼り合わせた多様体を捩れたトーラスという。ジャングルジムは右図のように捩れる。



例 10.0.17 (捻れた $S^2 \times \mathbb{R}$ 幾何). $\rightarrow$ 楕円幾何

例 10.0.18 (捻れた $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ 幾何). $\tilde{SL}_2$ の幾何

例 10.0.19 (solve 幾何).

	楕円幾何	ユークリッド幾何	双曲幾何
定曲率幾何	S^3	$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{H}^3$
直積幾何	$S^2 \times \mathbb{R}$	$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$
捻れ積幾何	S^3	Nil	$\tilde{SL}_2(\mathbb{R})$

リーマン幾何

M を微分可能多様体とする。各点 $p \in M$ において接空間 $T_p M$ 上に定められた内積をリーマン計量という。 $T_p M$ の基底を $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ とすると、リーマン計量は行列 $(g_{ij}) = (\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle)$ により与えられる。

例 10.0.20. ユークリッド空間 $\mathbb{E}^3$ のユークリッド計量は、

$$g_{\mathbb{E}^3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

により、与えられる。接ベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \in T_p \mathbb{E}^3$ に対して、内積は、

$$\vec{a}^T g_{\mathbb{E}^3} \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

となる。

例 10.0.21. 上半空間 $\mathbb{H}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_3 > 0\}$ にリーマン計量

$$g_{\mathbb{H}^3} = \frac{1}{x_3^2} g_{\mathbb{E}^3}$$

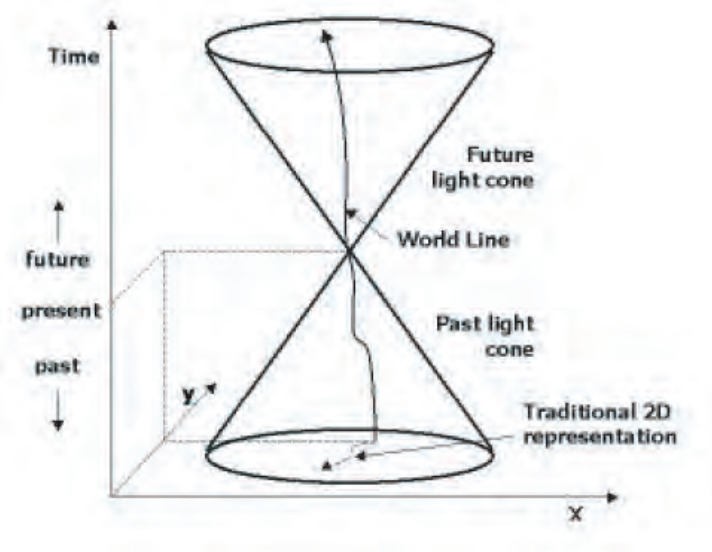
を入れると、双曲空間が得られる。

例 10.0.22. $\mathbb{R}^4$ に計量

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

を与えた空間をミンコフスキー空間という。ミンコフスキー空間は、アインシュタインの特殊相対性理論での時空（時間と空間を合わせた 4 次元多様体）として使われた。

Figure 1. Minkowski's light cone



曲線 $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ の長さは

$$L(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt$$

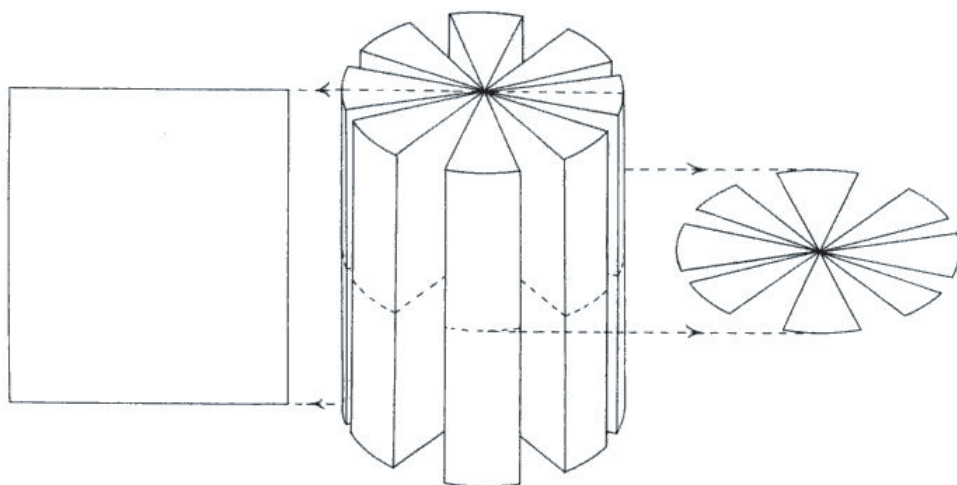
により、求められる。点 $p, q \in M$ の距離は、 p と q を繋ぐ曲線の長さの下限と定義される。

$$d(p, q) = \inf\{L(\gamma) : \gamma(0) = p, \gamma(1) = q\}$$

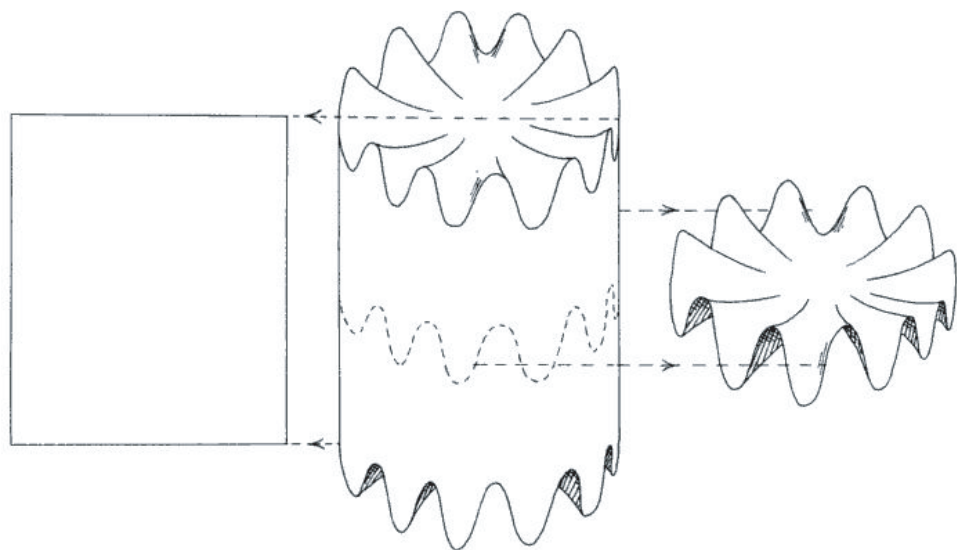
この距離により、 M は距離空間となる。 p から q への長さ最小の曲線を測地線という。

各点 $p \in M$ および各平面 $P \subset T_p M$ に対して、断面曲率 $K(P)$ が定義される。 M が曲面の場合は、ガウス曲率に一致する。

例 10.0.23. $S^2 \times S^1$ は、水平方向では球面幾何構造を持つので断面曲率は $+1$ であり、垂直方向ではユークリッド幾何構造を持つので断面曲率は 0 である。等方幾何は全ての方向で同じ断面曲率を持つので、 $S^2 \times S^1$ は等質であるが等方ではない。



例 10.0.24. $\mathbb{H}^2 \times S^1$ は、水平方向では双曲幾何構造を持つので断面曲率は -1 であり、垂直方向ではユークリッド幾何構造を持つので断面曲率は 0 である。等方幾何は全ての方向で同じ断面曲率を持つので、 $\mathbb{H}^2 \times S^1$ は等質であるが等方ではない。



リッチ曲率とは、断面曲率の平均である。単位ベクトル $v \in T_p M$ に対して、

$$Ric(v, v) = (n - 1) \cdot (v \text{ を含む平面 } P \text{ の平均断面曲率})$$

と定義される。

リッチフロー

1986 年、ゲージとハミルトンは次の定理を示した。

定理 10.0.25. 平面上の曲線の各点において、曲率に比例する速度で曲線と垂直の方向へ移動するとき、その曲線はどんどん円に近づきながら一点に縮まる。

言い換えれば、曲率が拡散して一定になるということである。

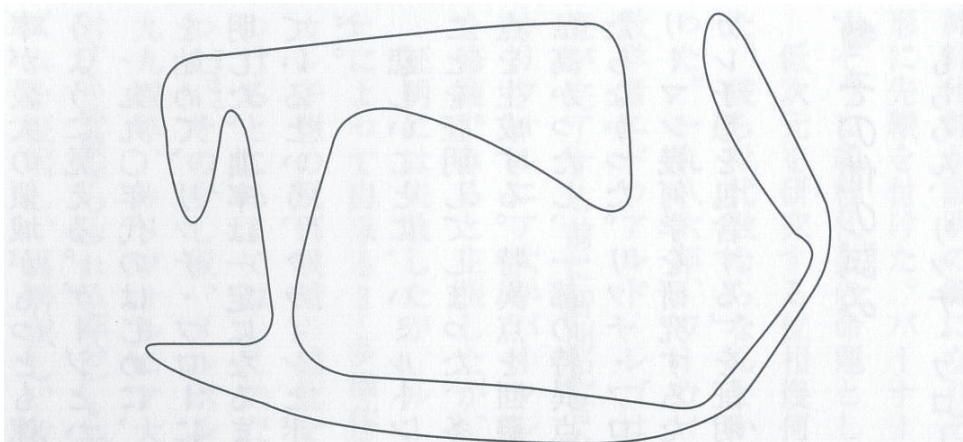
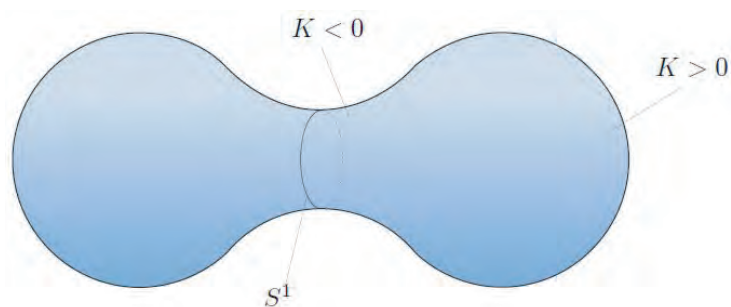


図51 ある曲線が、どの点でも、曲線と垂直な線に沿って、曲線にもっともぴったりフィットする円の半径の逆数（それが曲率である）と等しい速度で、その円の中心の方向に動く場合、その曲線は一点に縮まり、その過程でどんどん円に近づく。これがゲージ=ハミルトン定理である。

この定理は、1988 年のハミルトンの論文と 1991 年のコウの論文により、曲面へ拡張された。

定理 10.0.26. 任意の向き付け可能な閉曲面において、リッチフローに従って曲率を変化させれば、最終的には曲面の曲率が一定になる。

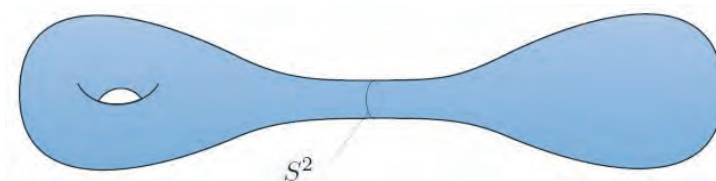
2 次元の場合は、ガウス曲率が負のところは拡大し、正のところは縮小される。最終的に定曲率となり、一意化定理が成り立つ。

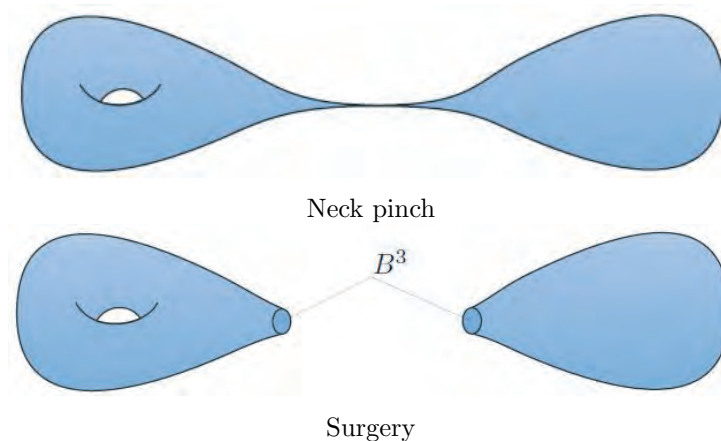


$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} = -2R_{ij}$$

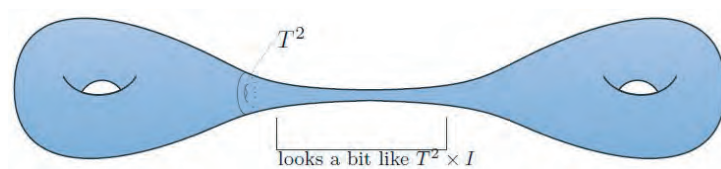
g_{ij} はリーマン計量、 R_{ij} はリッチ曲率

ところが、3 次元の場合は、リッチフローに沿って変形すると、特異点ができる。特異点において、切り口に B^3 で蓋をする。これは、球面分解に対応している。





特異点にトーラスが現れる場合は、トーラス分解に対応する。

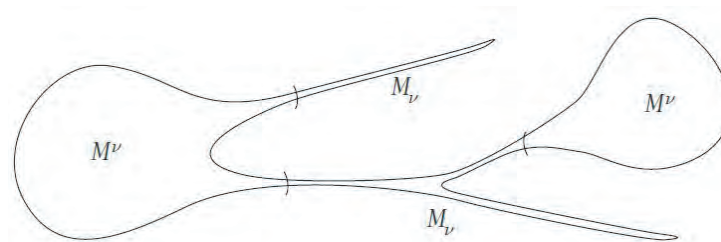


リーマン計量 g を持つリーマン多様体 M は、thick-thin 分解を持つ。thick part M^ν 、thin part M_ν はそれぞれ、

$$M^\nu = \{x \in M | \text{vol} B_x(1) \geq \nu\}$$

$$M_\nu = \{x \in M | \text{vol} B_x(1) < \nu\}$$

ここで、 $\text{vol} B_x(1)$ は x を中心とする半径 1 の球体の体積である。



リッチフローを長時間走らせていくと、最終的に thick part M^ν は双曲的多様体に、thin part M_ν はグラフ多様体になる。

これにより、自然に球面分解とトーラス分解が現れ、しかも分解された各多様体が曲率一定となることが示される。従って、サーストンの幾何化予想が解決された。

関連図書

- [1] 「ポアンカレ予想を解いた数学者」ドナル・オシア著 日経 BP 社
- [2] 「ポアンカレ予想」ジョージ・G・スピーロ著 早川書房
- [3] <http://www.math.lsa.umich.edu/~lott/ricciflow/perelman.html>
- [4] <http://staff.science.uva.nl/~riveen/3-manifolds.htm>
- [5] H. Poincaré, *Second complément à l'analysis situs*, Proc. London Math. Soc. **32** (1900), 277-308.
(See Oeuvres, Tome VI, Paris, 1953, p.370.)
- [6] H. Poincaré, *Cinquième complément à l'analysis situs*, Rend. Circ. Mat. Palermo **18** (1904), 45-110.
(See Oeuvres, Tome VI, Paris, 1953, p. 498.)
- [7] H. Poincaré, The present and the future of mathematical physics, Bull. Amer. Math. Soc. **37** (2000) 25-38. <http://www.ams.org/bull/2000-37-01/S0273-0979-99-00801-0/S0273-0979-99-00801-0.pdf>
- [8] <http://www-mechmath.univer.kharkov.ua/geometry/preprint/perelman7.pdf>
- [9] J.-P. Luminet, J. Weeks, A. Riazuelo, R. Lehoucq, J.-P. Uzan, *Dodecahedral space topology as an explanation for weak wide-angle temperature correlations in the cosmic microwave background*, arXiv:astro-ph/0310253.
- [10] J. Weeks, *Curved Spaces*, <http://www.geometrygames.org/CurvedSpaces/>
- [11] John Nash, *The imbedding problem for Riemannian manifolds*, Annals of Mathematics **63** (1956) 20-63.
- [12] Etienne Ghys and Jos Leys, *Lorenz and modular flows: a visual introduction*, http://www.josleys.com/articles/ams_article/Lorenz3.htm
- [13] Jos Leys, *Mathematical imagery*, <http://www.josleys.com/>
特に、以下の3冊はお勧めしたい。
- [14] 谷口雅彦, 奥村善英, 双曲幾何学への招待, 培風館
- [15] J.R. ウィークス, 曲面と3次元多様体を視る, 現代数学社
- [16] W.P. サーストン, 3次元幾何学とトポロジー, 培風館
ウィークスとサーストンの著書については、原著がある。
- [17] Jeffrey R. Weeks, *The Shape of Space*, Marcel Dekker Inc.
- [18] William P. Thurston, *Three-Dimensional Geometry and Topology*, Princeton University Press